A presente edição da Revista de Educação da APEOESP contém subsídios para os professores da rede pública estadual, associados do nosso sindicato, que se inscreverão nos próximos concursos públicos promovidos pela Secretaria de Estado da Educação e que participarão das provas instituídas pelo governo.
Organizada pela Secretaria de Formação, esta publicação contém as resenhas dos livros que compõem a bibliografia dos concursos, realizadas por profissionais altamente qualificados, de forma a contribuir para que os professores possam obter o melhor desempenho nas provas.
Ao mesmo tempo, não podemos deixar de registrar nossa posição contrária às avaliações excludentes que vem sendo promovidas pela Secretaria Estadual da Educação que, além de tudo, desrespeita os professores ao divulgar extensa bibliografia a poucos dias da prova, inclusive contendo vários títulos esgotados.
Esperamos, no entanto, que todos os professores possam extrair desta da Revista de Educação o máximo proveito, obtendo alto rendimento nas provas dos concursos e avaliações.
Nossa luta por mais concursos prossegue, com a periodicidade necessária diante de uma drástica redução no número de professores temporários,agregando mais qualidade ao ensino e profissionalizando, cada vez mais, o magistério estadual. A periodicidade dos concursos a cada quatro anos – com ritmo mais acelerado nos próximos dois anos – foi uma conquista nossa e vamos exigir que seja efetivada.
A diretoria

Índice Matemática

1. BESSON, Jean-Louis (Org.). A ilusão das estatísticas. São Paulo: UNESP, 1995.

2. BOYER, Carl B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

3. COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

4. DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. O sonho de Descartes: o mundo de acordo com a matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

5. DEVLIN, Keith. O gene da matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. Rio de Janeiro: Record, 2004.

6. EGAN, Kieran. A mente educada: os males da educação e a ineficiência educacional das escolas. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

7. EVES, Howard. Introdução à história da Matemática.Campinas: UNICAMP, 2004.

8. GARBI, Gilberto G. A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

9. IFRAH, Georges. Os números: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

10. LIMA, Elon Lajes et al. A matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 1999. v. 1, 2, 3 (Coleção do Professor de Matemática).

11. LOJKINE, Jean. A revolução informacional. São Paulo: Cortez, 1995.

12. MLODINOW, Leonard. A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

13. MOLES, Abraham. A criação científica. São Paulo: Perspectiva, 1998

14. SATOY, Marcus Du. A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

1. BESSON, Jean-Louis (Org.). A ilusão das estatísticas. São Paulo: UNESP, 1995.

Um ponto de vista sobre a Terra

Extraterrestres, chamados de marcianos, mantinham sua nave em órbita acima da Terra. Por meio de uma equipe de estatísticos efetuavam observações sobre a Terra buscando conhecer os seres e sua característica. O critério para definir seres era a verticalidade, sendo considerado um *ser* tudo o que tivesse acima de 1,20 metro, assim crianças não eram seres, mas arbustos, árvores, torres de petróleo, arranha-céus eram. A distribuição observada na amostragem - em termos equivalentes inteligíveis aos usados pelos marcianos - foi:

bebês 1,2/6 m	6%
aprendizes 6/12 m	11%
neófitos 12/14 m	19%
adultos 24/28 m	26%
engenheiros 48/120 m	20%
sábios 120/240 m	12%
inteligências 240 m e +	6%

Com isso observou-se uma média de altura de 74,6 metros na Terra, sendo que a espécie considerada rainha raramente ultrapassa 1,80 metro. Talvez, se tentassem entrar em contato com os seres maiores de 2 metros, ficariam decepcionados, mas o silêncio ou até mesmo ondas eletromagnéticas e transpirações podem ser interpretados como respostas.

A segunda parte consistia em analisar a economia do planeta. O PIB era medido pela quantidade de óxido de carbono – único alimento dos marcianos – produzido em um período de 547 dias terrestres. Apresentou-se uma relação, então, curiosa aos marcianos: zonas de maior proporção de sábios e inteligentes eram as de menor produção de óxido de carbono. Por outro lado, em zonas de bebês – seres mais baixos da escala social – a produção econômica do planeta atingia seu máximo. Compreendeu-se então que pequenos animais agitados, carros em um engarrafamento, haviam sido domesticados para produzirem óxido de carbono, e, por isso, havia abundância de óxido, tornando um recurso ilimitado ao planeta, justificando assim a grande quantidade de sábios e inteligências no planeta.

Editorial

A estatística marciana é igual à nossa. O que muda é o ponto de vista pelo qual os marcianos contemplam a nossa realidade. Há então uma distinção entre a estatística e as estatísticas.

A estatística é um conjunto de técnicas matemáticas de tratamento de dados numéricos. Técnicas essas que são universais a partir do momento em que são dados os dados. Já as estatísticas são os resultados da observação feita pela estatística, ou seja, é a interpretação dos dados obtidos pela estatística. Vemos, então, que a estatística dos marcianos foi feita de maneira correta, porém as estatísticas soam estranhas a nós. O exemplo é extremo, mas é muito comum quando se troca de país ou época. As estatísticas não refletem a realidade, refletem o olhar da sociedade sobre si mesma.

As estatísticas: Verdadeiras ou falsas?

Vivemos no mundo das cifras. Pensamos em dados, quantidades, o tempo todo para tomarmos decisões. Mas as cifras são exatas?

Morgenstern (1972) denuncia a ilusão da exatidão, não há cifra absolutamente exata. Há dificuldades de observação em massa, como em um recenseamento em que há duplas contagens, omissões de pessoas, omissões de casas. O recenseamento não é, portanto, exato, mas também não é falso. Há uma margem de erro, que muitas vezes pode ser muito pequena, porém em um todo acaba sendo bastante representativa. O erro é resultado de uma arbitragem feita entre a vantagem causada pelo aumento da exatidão e seu custo.

Técnicas de amostragem trazem aumento da qualidade e diminuição de custos. Estuda-se uma amostra e estende-a a toda população. O problema é então o valor da extrapolação (inferência estatística). Diferentes amostras trazem diferentes resultados.

Há dois métodos: amostra aleatória e método de quotas:

Na amostra aleatória, técnicas baseadas na teoria da probabilidade calculam um intervalo em que se tem uma probabilidade fixada de encontrar o valor “real”. Neste caso, o intervalo de confiança é maior quanto menor forem os efetivos aos quais se refere: a população total é mais confiável que a de desempregados por exemplo. Uma estimativa é melhor quanto maior for o seu efetivo medido e quando sua dimensão é grande o suficiente em relação à população total. Porém, quanto maior a dimensão maior seu custo.

A técnica de quotas evita amostras aleatórias e escolhe amostra de acordo com critérios: idade, profissão, habitação, diploma etc. A inferência repousa na hipótese de que as variáveis de seleção estruturam as opiniões. O problema deste método é a pertinência das variáveis.

Estatísticas, então, são imagens de síntese, que representam não situações individuais, mas a média dessas situações.

As armadilhas da subjetividade carregam a força e a fraqueza do desempenho estatístico. Objetivação e superação das particularidades individuais para se atingir a massa. A estatística espontânea errônea é vítima das séries e dos pontos de vista, da seletividade do olhar, em que, por coincidência e omissão de fatos, generaliza-se uma suposta verdade.

O local e o global são outra fonte de erro das estatísticas. A média não significa nada se não soubermos da dispersão dos casos individuais em torno da média, para isso se calcula então os desvios em relação à média, o desvio típico; quanto maior for o desvio, menos sentido faz a média. Todavia, o cálculo desse desvio em si já é uma média, logo tem seu erro e seu próprio desvio individual.

O problema da credibilidade das estatísticas se agrava com as manipulações, reais ou presumíveis, que sofrem. Desvios vão desde apresentações e comentários falaciosos até as deturpações da “realidade”, deturpações essas que normalmente ocorrem quando a “realidade” observada é dependente de uma ação, de um governo.

Expor-se à observação, sendo um indivíduo ou uma organização, consiste em um risco. A informação possui um caráter estratégico, ela constitui uma relação de poder. Muitas vezes, é interessante negligenciar ou se aprofundar em dados, pois há interesses atrás deles. Como já vimos, a informação estatística possui um alto custo, portanto não se produz informação estatística sem que haja uma demanda que a torne necessária, que arque com seu custo.

Analisar o custo da vida humana gera um choque entre duas lógicas, dois pressupostos: o da economia e o do sagrado. O custo do tabagismo pode ser analisado economicamente assumindo a eles valores quantitativos, mas pode ser também analisado de maneira qualitativa: o custo da vida humana. A equivalência estatística se opõe ao velho principio da aritmética: não se somam coisas distintas.

Todo quadro de cifras possui uma dupla natureza: qualitativa e quantitativa. Ordenam-se dados através de nomenclaturas e divisões para que os mesmos possam ser qualificados e analisados de acordo com características determinadas. Mudando-se as escolhas, convenções, ou somente os procedimentos estatísticos, modificam-se as condições do registro estatístico.

A estatística não é como uma fotografia – exata – mas, sim, um espelho da sociedade, que possui um contorno definido. Porém, o estatístico não se limita a registrar, ele procede à observação, é papel do estatístico enquadrar e classificar os dados e a amostra nos contornos pré-definidos.

Ao se abordar a questão: para que serve a estatística? Tomemos como resposta que a estatística serve àqueles que agem no e sobre o múltiplo. Ela serve do ponto de vista da racionalidade limitada. Ela é eficaz enquanto os contornos pré-definidos são factíveis. O conhecimento estatístico é uma representação simplificada, falsa mas operatória nos limites da ação cotidiana.

Júlia faz estatísticas

Júlia, policial, foi designada a trabalhar com a estatística semestral de uma delegacia. Ao deparar-se com métodos errôneos, resolve organizar melhor os dados, não misturá-los, aprimorar os métodos de pesquisa. Como conseqüência atinge um número de casos 35% menor no semestre em questão. Ao saber disso, o comissário fica enfurecido, discordando dos métodos por ela utilizados e explica a Júlia que quanto mais casos fossem enumerados em seu setor, mais meios seriam concedidos para combatê-los. Julia, então, contata um jesuíta, seu antigo amigo, e transforma pecados confessados em casos criminais. Poucos meses depois, a delegacia ganhava um furgão novo.

Delitos e delinquência

A experiência de Júlia traz três períodos: a ambiguidade da unidade de medida, a complexidade do sistema repressivo francês, a variabilidade da cifra negra.

A ambiguidade manifesta-se da seguinte maneira: um mesmo crime é muitas vezes queixado por mais de uma pessoa, fazendo com que um único crime tenha mais de um registro. De maneira análoga, crimes cometidos, simultaneamente, pela mesma pessoa acabam tornando-se um único crime. É importante salientar também que o resultado dessa estatística está relacionado diretamente com a ação policial. Por exemplo, se a policia está focada no combate ao consumo de álcool, as estatísticas desse consumo irão aumentar.

A complexidade do sistema repressivo francês se dá pelo fato de que somente uma parte das infrações penais é definida pelo Código Penal. O delegado, então, apoia-se nessa brecha para justificar as incertezas dos métodos usados por Júlia, o que torna o conhecimento mais incerto ainda!

Cifra negra é uma expressão que designa o número de infrações que não chegam ao conhecimento das autoridades. Não chegam por inúmeras razões: vítimas e testemunhas se abstêm de dar queixa ou de denunciar por medo, ignorância, indiferença. Somente o anonimato do jesuíta permitiu o conhecimento de tais crimes. Também influi nas estatísticas policiais as queixas de roubo de objetos segurados, já que as seguradoras exigem queixa policial para pagarem o valor, fazendo com que o número de roubos aumente nas estatísticas.

À mesa! A cozinha do estatístico

Diferentes estatísticas referem-se aos produtos comprados. Sabe-se quanto de carne foi comprado, qual era o preço de seu quilo; porém, não se sabe como esta comida foi ingerida, quanto foi desperdiçado. Determinar quanto é gasto no consumo de alimentos é também uma tarefa difícil. As estatísticas francesas contam apenas o que é comprado para consumo em casa, negligenciando assim o que é gasto para consumo em bares e restaurantes – já que se paga pelo serviço – porém ao se omitir essa parcela, omite-se uma porcentagem do que é gasto com alimentação. Seria preciso também incluir consumos alimentícios em estabelecimentos de saúde, transportes etc.

Estatísticas americanas abordam o consumo de alimentos tanto em domicílio quanto fora do domicílio. Isso se deve à concepção da alimentação: para os americanos é possível alimentar-se a qualquer hora, em qualquer lugar; já para os franceses a alimentação transmite a ideia de uma refeição em casa, com horário e cardápio certo, sendo que, o que foge a esse quadro é considerado pelos franceses como ato de "beliscar".

Porém, com o desenvolvimento das indústrias alimentícias, saber o que, como, de que maneira os franceses comem, passou a ter grande importância econômica, fazendo com que essas mesmas indústrias financiassem tais pesquisas, que são extremamente complexas e custosas. Contudo, essas pesquisas têm um valor científico limitado, já que não é de interesse de muitas indústrias, que a quantidade de nutrientes e a relação do consumo com a saúde pública sejam algo de conhecimento público, por isso não financiam pesquisas com este enfoque.

Além disso, para conhecermos realmente a quantidade de nutrientes e a relação entre o consumo com a saúde pública, seria necessário que conhecêssemos a maneira como os alimentos são feitos, a dispersão com que são consumidos. Por enquanto, as estatísticas parecem estar muito longe destes conhecimentos.

Três milhões de desempregados

A noção de desemprego resulta, de um lado, das estruturas e do funcionamento do mercado de trabalho e, de outro, da política social[1].

Para o grande público a cifra de desempregados corresponde ao número de pessoas que procuram emprego, correspondendo à demanda por emprego. Essa demanda é quantificada através do número de pessoas registradas nas agências de emprego. Porém, nem todos os desempregados procuram emprego nas agências de emprego, e, em contrapartida, nem todos os inscritos em agências de emprego estão desempregados.

No século XIX, não se julgava útil classificar os desempregados à parte. Eles caiam na indigência, que incluía todas as pessoas incapazes de suprir suas necessidades. Após a

1 Maurice Comte, *A ilusão da estatística*, p.95

revolução industrial, o desempregado aparece como o trabalhador ao qual falta o trabalho, percebido sob o ângulo de alguém que tem direito.

A primeira definição do desemprego diz respeito aos trabalhadores. Ela se aplica aos trabalhadores habitualmente ocupados que se encontram sem emprego, excluindo assim, o desemprego voluntário, a dispensa por falta e os que estão se inserindo no mercado de trabalho. Em 1954, acrescentam-se os não-trabalhadores que procuram emprego e não o encontram, essa definição apenas normatiza algo que já fazia parte da consciência social.

A observação estatística refere-se à população em idade de trabalhar e a divide entre ativos e inativos. Os ativos compreendem ocupados – os que trabalham – e desempregados – os que desejam trabalhar – sejam eles assalariados ou independentes. Entre os inativos, compreendem-se todos os outros: donas de casa, estudantes, inválidos, aposentados etc. A classificação estatística baseia-se, então, em duas condições: as três categorias – emprego, desemprego e inativos – são dissociadas; e as posições são suficientemente estáveis, garantindo que a posição da data da pesquisa seja um bom índice da posição habitual. Entretanto, o que ocorre é que, em torno do desemprego total, há um número de pessoas permanentemente subempregadas, além de uma população flutuante que muda constante e rapidamente de categoria, sendo encaixada em uma das três categorias em razão de sua posição na data.

Outra inadequação desta medida está no fato de economias distintas possuírem estruturas distintas. Por exemplo, em um país subdesenvolvido, se utilizarmos o critério de cidadão inativo àquele que não procura emprego há um mês e aumentarmos o período para três meses, veremos dobrar o número de desempregados – que deixarão de ser inativos. Como solução a isso, devemos abandonar a noção global de desemprego em proveito de indicadores parciais mais significativos, além de completar observações instantâneas com estudos de trajetórias.

Suicídios: Modos de registro

Durkhein utiliza-se da estatística como um meio de evitar a abordagem individualista ou psicologizante espontânea do suicídio.

Variações características das taxas de suicídio podem remeter a taxas de registro variáveis. A menor quantidade de suicídios entre católicos e casados pode levar não a uma maior proteção contra o suicídio, mas, sim contra o seu registro estatístico, transformando suicídios em mortes acidentais. A essa incerteza de dados, soma-se a incerteza da causa de mortes investigadas que, quase sempre, entram na rubrica de morte desconhecida. Ou seja, os modos de produção de dados podem induzir enfoques estatísticos, gerando resultados deformados.

Há um confronto entre a concepção médica e jurídica do suicídio. A concepção médica da morte exclui a idéia de morte violenta. O suicídio é um intermediário entre um estado patológico que o envolve e uma causa imediata que ele explica (o próprio traumatismo mortal). A concepção jurídica introduz uma consideração quanto à responsabilidade do crime, o que ocasionou o suicídio, o que o permitiu.

Para classificar-se um caso como suicídio, ele deve se assemelhar a tal, isto é, deve ter um número de elementos observáveis suficientes para aproximá-lo da ideia de mortes por suicídio. A imagem do suicídio remete àquilo que causou a morte, tornando o instrumento que causou a morte "chave" nesta classificação. Porém, esta classificação pode se tornar ambígua: afogamentos, envenenamentos, *overdoses* podem ser classificados como acidentes.

O morto também deve se assemelhar a um candidato ao suicídio. Com isso, crianças, adolescentes e idosos dificilmente são considerados suicidas. Já pessoas com antecedentes médicos e psiquiátricos enquadram-se mais facilmente em um quadro suicida. Além disso, é necessário um mínimo de convergência do quadro.

Os estudos sobre os dados estatísticos não têm somente uma dimensão crítica, mas também uma dimensão positiva.

As estatísticas no debate social

Não se conta o que não é codificado, sendo assim as estatísticas se revelam tanto um reflexo como um componente do debate social. Codificar é colocar em equivalência de acordo com algum critério.

A codificação jurídica é a mais imediata e clara para a contagem, por conseguinte a mais confiável. Define nacionalidade, atos legais de ilegais etc. Há também a codificação por meio de acordos coletivos, como convenções coletivas que definem categorias de assalariados.

Na falta de leis e acordos coletivos, resta ao estatístico a "norma" social para definir categorias. A noção de "norma" social expõe mais facilmente o estatístico à crítica, pois é ele quem toma a iniciativa de nomear uma categoria. É importante salientar também que as fronteiras que dividem as categorias sociais não são rígidas, variando de acordo com o período, a estrutura social e até mesmo os critérios para tais divisões. Outra crítica também pertinente é a de um etnocentrismo por parte dos estatísticos: veem-se melhor as diferenças sociais nos meios mais próximos à sua realidade do que nos meios mais afastados.

Cifras que falam: Medida estatística e juízo comum

Os modos de explicação e de justificação das ações estão ligados aos tipos de informação recolhidos por sua pertinência. As formas de aproximação e codificação constituem as formas de se construir a prova.

A estatística é, desde sua origem, uma ciência do Estado. O raciocínio probabilístico é como um diagnóstico, que contribui para a construção de modelos de interpretação.

Visita a uma empresa

Na França, os estatísticos pertencem a um organismo do Estado. Notam-se duas coisas: constituem uma classe muito organizada, e possuem independência em seus dados. Mesmo que os dados contrariem o governo, o que resta ao governo é divulgar dados em datas que o convenham, não conseguindo pressionar estatísticos para que mudem tais dados.

Entre a ciência universal e as tradições nacionais

O sonho de harmonização geral dos métodos de registro é somente realizável parcialmente. Comparar dados estatísticos de diferentes países é algo muito comum, mas se abrirmos a caixa preta dos métodos estatísticos utilizados por cada um dos países para realizar essas pesquisas veremos que eles não serão idênticos, logo estaremos comparando dados distintos. Há então um conflito entre as técnicas cientificas universais e as especificidades de cada Estado.

Harmonizar estatísticas implicaria em harmonizar características distintas: sistemas fiscais, proteção salarial, critérios salariais, definições de emprego etc.

A construção das contabilidades nacionais – sínteses macroeconômicas exaustivas e coerentes de intercâmbios de renda e de bens e serviços das diversas nações – é dos campos mais desenvolvidos da harmonização dos métodos. Já os indicadores sociais continuam a ser mais complicados de se harmonizar que os indicadores econômicos, devido às diferenças de políticas sociais dos países.

Podemos observar, por exemplo, diferenças de sistemas estatísticos de três países: França, Alemanha e Inglaterra. Na Inglaterra há o pragmatismo inglês, em que nasceram as principais técnicas matemáticas da análise estatística. Na Alemanha, há uma preocupação com a legalidade das pesquisas. E, por último, na França vemos o cartesianismo francês, em que as estatísticas efetuam além de pesquisas, sínteses macroeconômicas, estudos, descrições regionais etc.

As diferenças entre as estruturas econômicas e sociais de países não impede totalmente a sua comparação. O fato é que as comparações têm de se fundar em convenções de equivalência entre os fatos observados entre os países.

A fluidez e a rigidez

Relações de equivalência só têm sentido se formos capazes de definir seu campo e seu princípio. Toda a estatística se baseia em uma estreita ligação entre aquilo que é observado e o que se deseja conhecer, recriando um nível de análise em que a noção de equivalência seja admissível.

O problema não se encontra em flutuações entre as categorias, mas sim, em saber se os fenômenos expressos por categorias são idênticos.

Todo o questionário estatístico recolhe declarações e não fatos. Sendo assim, presume-se uma boa-fé por parte do questionado e se assumem dois postulados: a realidade é única e independe das circunstâncias; o informante pode transmitir uma visão objetiva disso. Porém, esses postulados têm sido muito discutidos, colocando-se sua neutralidade em questão.

Para apreendermos fenômenos complexos temos de associar a sintaxe das palavras ao questionamento, gerando questionamentos maiores, reduzindo assim a ambiguidade dos questionários. No entanto, isso acaba gerando pesquisas mais caras, além de muitas vezes acabarem tomando um tom inquisitorial e atentarem contra a vida privada.

Quando categorias são sólidas, seu conteúdo é objeto de um consenso geral, já quando essas categorias são fluidas, desenvolvem-se diversas interpretações sobre seus dados. Esse problema de múltiplas interpretações é resolvido impondo-se uma interpretação, o que não resolve de fato a questão. Um exemplo disso é o concubinato, que por essência é uma posição não definida na nomenclatura centrada no matrimônio, mas pela sua frequente ocorrência acabou por ser enquadrada nesta nomenclatura.

A operação estatística se beneficia de meios técnicos, mas é para certificar sua garantia que crescem as dificuldades. O fluxo que é observado, somado à demanda de indicadores altamente elaborados, geram fortes tensões no processo de elaboração das informações.

A tentação do modo de usar

As cifras não são nada, não valem nada sem um discurso que lhes atribua sentido. Este discurso normalmente é falacioso, sempre problemático.[2]

Quando analisamos variações relativas, devemos tomar alguns cuidados:

Variações variáveis. Uma pequena variação das cifras normalmente se dá dentro de uma margem de erro. Ou seja, muitas vezes uma pequena variação, por estar dentro da margem de erro, esconde uma estagnação, aumento, ou diminuição das cifras. É sempre importante então, não se excitar com pequenas variações.

Dessazonalização. Muitas vezes, dados apresentam diferenças de acordo com a época do ano. Por exemplo, consumo de energia elétrica aumenta no inverno. Há diferenças técnicas que permitem estimar a cifra sem o elemento sazonal. Ocorre, então, uma diferença entre a cifra bruta e a cifra dessazonalizada, que é resultado de uma correção. Naturalmente essa cifra dessazonalida não é perfeita.

Escolher sua variação. A variação relativa depende da variação absoluta e do valor inicial. Por exemplo, um aumento de 100 em um total de 500 representa 20%; o mesmo aumento em um total de 1000, representaria 10%, o que gera uma tendência de se aumentar taxas decrescentes e diminuir taxas crescentes. Logo, se deve atrair a atenção à variação da variação. Outro ponto em questão é o fato de que os aumentos relativos, por estarem compreendidos entre zero e o infinito, são mais amplos que as diminuições – compreendidas entre 100% e 0 (zero).

Perigos do ponto fixo. Sempre que se expressam resultados em relação a uma base, tornam-se mais sensíveis as distâncias de cada variável em relação à base, mas se apagam as diferenças em relação às bases, que são sempre iguais. Como quando se comparam PIB e taxas de desemprego entre países, em que se busca aproximar os primeiros com os segundos sem perceber que os primeiros são valores absolutos e os segundos, relativos.

Os gráficos. Conforme a escala e as unidades adotadas, resultados são amplificados ou diminuídos. Uma escala exageradamente aumentada gera flutuações de amplitude muito grandes, ao passo que escalas pequenas geram gráficos mais estáveis. Gráficos figurativos também geram problemas, pois têm suas dimensões muito inexatas. Podemos também escolher unidades de tempo plurianuais, que omitem flutuações através de uma média. Por exemplo, uma alta de 3% e um baixa de 2% terão uma taxa média de 1% de crescimento.

A linguagem das variáveis. O estatístico pode trabalhar em um universo com n dimensões e inúmeras variáveis, mas ele não pode transmiti-las todas ao público. Um quadro possível de 25 variáveis tomadas 4 a 4 dariam 300 mil quadros. O estatístico deve escolher tendo em conta a pertinência e também sua demanda, e o público não pode esquecer -se de que o quadro apresentado é apenas um dos possíveis pontos de vista sobre o fenômeno. As cifras não são escolhidas ao acaso: elas devem falar e devem ser entendidas.

Ao interpretar dados devemos também tomar alguns cuidados:

---

2 Jean-Louis Besson, *A ilusão da estatística*, p.201

Correlação e causalidade. Sempre se procura uma variável que explique um resultado. Uma pesquisa avaliou a quantidade de aparelhos *hi-fi*, e viu que locatários os possuem mais frequentemente que proprietários. É preciso então encontrar outras variáveis que escondam esse resultado. Podemos associar, por exemplo, a variável da idade, em que famílias locatárias – por serem mais jovens – possuem mais aparelhos de *hi-fi*. Mas a idade é também uma variável perigosa, ela sintetiza um grande número de outras variáveis.

O efeito da estrutura. Aparece quando comparamos populações de diferentes estruturas. Quando se comparam salários médios de homens e mulheres, é preciso verificar se ocupam os mesmos cargos, trabalham o mesmo período. Para comparar esses salários, devemos isolar a influência do sexo da influência dos outros fatores.

É preciso corrigir? Ao corrigirmos o efeito da estrutura é como se isolássemos uma variável, reduzindo a zero a distorção por ela causada. Como se uma população de agricultores habitasse uma grande metrópole, e uma grande metrópole compreendesse o campo. O que importa de um resultado é a análise que fizemos, é saber em quanto cada variável influenciou tal resultado. Ou seja, a correção dos efeitos de estrutura depende da análise. E a análise tem como função conservar as variáveis mais importantes, porém, na prática o usuário comum não tem competência teórica e técnica para analisar a informação bruta, ele testa as variáveis até ver qual que "serve".

As dimensões da idade. A diferença de idade se atém mais à evolução social que aos contextos individuais. Porém é importante entender que há diferenças entre gerações, sendo assim a mera comparação de faixas etárias não bastam etc. Há ocorrências em que a idade pode servir de falsa explicação.

Os subentendidos do sexo. A variável "sexo" tem um forte poder explicativo. Ela se atém às diferenças de estado na sociedade. A utilização desta variável acarreta a si inúmeros desafios, tanto por si só quanto por sua complementaridade. Homens e mulheres vivem normalmente em pares, o que torna complicado a análise independente dos sexos. Por exemplo, mulheres retiram mais livros em bibliotecas do que homens, isso não significa que elas leem mais, mas também que elas os retiram para toda a família. Variáveis mais evidentes são perigosas: têm alto poder explicativo e pequeno poder analítico.

A opinião de pesquisadores

Quanto às pesquisas (sondagens) de opinião, podemos distingui-las, esquematicamente, em três tipos: pesquisas que se referem à intenção de voto tratam-se de simples pesquisas técnicas que implicam uma teoria matemática de amostragem para satisfazer uma curiosidade, sem implicar em teorias sociológicas da opinião; em segundo lugar, pesquisas que se referem aos comportamentos ou às práticas, que incluem um certo número de problemas técnicos – banais e conhecidos – específicos; em terceiro lugar pesquisas de "opinião publica", mais numerosas e importantes.

Devido aos bons resultados das pesquisas pré-eleitorais – previsões próximas à realidade – os institutos de pesquisa ganharam certa credibilidade a todas as sondagens realizadas, principalmente às realizadas no domínio da opinião pública. Porém, os institutos de pesquisa não criam a eleição, apenas procuram prever seu resultado, o mesmo não ocorre em relação às outras pesquisas de opinião, em que os institutos criam situações que não existem, como tais na realidade política, causando inúmeras deformações inerentes à situação da pesquisa.

A técnica por questionário traz junto a si inúmeros problemas, os agentes sociais quase sempre omitem algo do que fazem, e, principalmente, quando se pretende recolher algo tão flutuante como "opiniões". As respostas podem variar de acordo com as perguntas. É importante, então lembrar, que não há boas ou más questões, mas sim, boas ou más interpretações.

É preciso lembrar também que pesquisas de opinião dificilmente recolhem opiniões; elas apenas avaliam se os pesquisados concordam ou não com opiniões já formadas. Não basta considerar uma boa questão aquela que, é efetivamente, compreendida semântica e linguisticamente – o que está longe de ser efetiva para todos os pesquisados. Os pesquisadores deveriam utilizar-se mais de perguntas abertas, pois a quantidade de não-respostas, e a diversidade de respostas que recebem transparecem uma ideia mais real da opinião.

Os pesquisadores, então, criaram uma espécie de novo fetiche estatístico. Contribuíram para a crença de uma "opinião pública", resultante complexa das estratégias de comunicação, múltiplas e concorrenciais, que impõe às classes mais numerosas o que convém pensar, e portanto, o que fazer em política.

A economia cega

Liberalismo e intervencionismo mantêm relações opostas com as estatísticas: o liberalismo deseja colocá-las em seu devido lugar; o intervencionismo faz delas fundamento de sua ação. Estatísticas servem para guiar a ação, e permitem construir os indicadores que ela utiliza e assim uma política econômica. Já para os liberais, a economia se auto-rege, logo, as estatísticas são inúteis e até mesmo nocivas, já que elas estão aliadas à burocracia e as normas do Estado para dirigir a economia.

Um exemplo que ilustra a *cegueira estatística* é a da taxa de juros real. Ao se emprestar dinheiro, cobra-se uma taxa – taxa nominal. No entanto, espera-se que o poder de compra continue o mesmo, mas o que ocorre é que há inflação fazendo com que o poder de compra desses mesmos juros caia. Logo, os juros reais – juros nominais menos inflação – são inversamente proporcionais à variação de preços e serviços.

Para se estimar a inflação, devemos efetuar uma média ponderada de preços de bens e serviços, ou seja, uma construção estatística. O que chamamos de taxa de juros real não existe, é uma construção estatística. Um investidor está interessado na taxa média de rendimentos da bolsa, não em uma taxa média de preços ao consumidor, que pouco representa em sua vida. O índice de inflação estabilizou-se, ao passo que índices que não entram na inflação, como o mercado financeiro, imobiliário, de arte, sofrem o efeito da especulação tendo seus preços exponencialmente aumentados.

A política econômica necessita de indicadores econômicos para ver e agir. Porém, nem sempre estatísticas são confiáveis e coerentes com o objetivo e com o que está se analisando. O mercado financeiro, por exemplo, espera por índices que muitas vezes são incertos para tomar sua decisão, e quanto mais se desenvolve a especulação, mais viciosa se torna a utilização das estatísticas, fazendo com que preços percam seu sentido.

Estatísticas, então, desempenham um papel importante na definição de convenções ao mercado e à economia. Convenções essas que não são nem verdadeiras, e nem falsas, apenas admitidas.

E-F: Estatísticas e ficção

A estatística é tomada em um triplo sentido: o das teorias matemáticas, que pemitem cercar os efeitos do acaso; em seguida mais concreto, o que permite descrever o presente, reconstruir o passado e prever o futuro; e, por último, o mais vago, que distribui a sociedade em série de moldes. Ou seja, uma ciência, uma técnica e efeitos destas ciências e técnicas, nutrindo a ficção científica.

A estatística é muito comum na ficção científica, representando um subgênero a antiutopia. Sociedades futuras doentes por enumeração, como vemos em *Admirável mundo novo* de Aldous Huxley, que descreve uma sociedade uniformizada em que a dispersão estatística das características humanas não pode ultrapassar um determinado valor. Há também inúmeras obras que relacionam as probabilidades estatísticas em sociedades que se organizam ao acaso, em que vidas são determinadas por combinações casuais e aleatórias.

Sociedades têm necessidades de relatos de seu futuro, que proporcionem projetos, esperança, temores e limites. A estatística é, então, uma escola de subjetividade, que proporciona relatos de seu futuro, e não uma coleção de certezas.

Nem tanto excesso de honra, nem tanta indignidade

Após a leitura dos artigos passados, concluímos que as estatísticas realizam uma *modelização* da realidade e pertencem à ordem da ação.

As estatísticas não merecem nem o excesso nem a falta de honra. Elas nos trazem um conhecimento limitado da realidade – realidade essa que é desconhecida – que muitas vezes é operatório. Não podemos esperar que elas substituam o Conhecimento que nos falta, pois este Conhecimento é um mito dos tempos passados.

A estatística nos permite agir eficazmente sobre a realidade sem conhecermos essa realidade. Muitas estatísticas são fortes no plano da ação e frágeis no do conhecimento, por exemplo, o fato de alguns nomes comprarem mais do que outros. Não podemos acreditar que estatísticas são fotografias quantitativas da realidade, neste caso o conhecimento estatístico se confunde com o Conhecimento.

Um outro olhar

Um Estrangeiro, da tribo dos Narizes-Verdes, não contava sua idade, e ao ser indagado sobre sua idade não soube responder – o que não significava que ele não tivesse uma. Ao deparar-se com a sociedade, e com suas inúmeras contagens: anos, quilos, centímetros, quilômetros, tempos, o estrangeiro fica assustado, e não entende como seres humanos eram negociados com e como números.

Após um tempo de observação, o Estrangeiro chega à conclusão de que as cifras servem como um ritual para afastar poderes maléficos. Ao se efetuarem estatísticas, criavam-se barreiras que tais poderes não conseguiam atravessar.

Um dia o Estrangeiro é fichado em uma delegacia: são perguntados seu nome, sexo, idade, altura, profissão. Após isto, ele é registrado. O estrangeiro, sem entender, acreditava que se tratava de uma tradução numérica de seu nome. Mas após receber explicações, desespera-se ao perceber que está preso ao mundo dos números. O Estrangeiro só se acalma após perceber que, mesmo fichado, nada sabiam sobre ele.

Ao deparar-se com comparações de PNB entre países, o Estrangeiro indaga-se se o vencedor ganharia um prêmio e questiona como são feitas tal comparações e quais suas relevâncias.

Quando chegou a época do recenseamento na França, o Estrangeiro viu bater à sua porta uma moça – Maria – que lhe ajudou a responder o questionário. O fato de Maria não o conhecer, inibe o Estrangeiro em suas respostas, que sente dificuldade em definir sua profissão, e não entende o fato de ser classificado como não residente. As hesitações da entrevistadora divertem o Estrangeiro, como em um país com castas tão bem definidas era tão difícil de se incluir em uma delas. O Estrangeiro se indaga para que servem tais perguntas e se elas não atentam à vida privada dos entrevistados.

O Estrangeiro conversa com um engenheiro do Instituto de pesquisa francês e percebe que as estatísticas servem ao Estado e aos comerciantes. A população comum, de forma insidiosa ou dissimulada, julgava e situava o outro sem apelar para nenhuma estatística. A experiência cotidiana supria a necessidade de estatísticas. Ele nota que as pessoas não acreditam em estatísticas – embora digam que sim – muito menos em sondagens, mas essas mesmas pessoas comemoravam ao ver índices de preços, dedicavam seus investimentos com base em variações estatísticas etc.

Em um jantar, o Estrangeiro percebe então a função das estatísticas: elas servem para dar um sentido à sociedade. As estatísticas fabricam uma imagem de conjunto social, a existência de uma sociedade e de vínculos sociais. Sua existência dava aos indivíduos a ilusão de existir, e aos governantes, de comandar, criando o ser e a identidade. Uma ficção necessária que não pode dar margem a nenhuma dúvida.

2. BOYER, Carl B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

Nesta obra, o leitor verificará que o nível de conhecimento matemático, geralmente pressuposto, é o de um estudante de curso superior de 2° ou 3° ano. Mas este material pode também ser visto como um recurso a mais para leitores com preparo matemático superior ou inferior a este.

Cada capítulo é concluído com uma coleção de exercícios, geralmente distribuídos em três categorias. São questões do tipo *ensaio*, destinadas a indicar a capacidade do leitor para organizar e exprimir com suas palavras o que foi discutido no capítulo. Seguem-se exercícios relativamente fáceis, que exigem provas de alguns teoremas mencionados no próprio capítulo ou sua aplicação a várias situações. Os exercícios não fazem parte da exposição e podem ser dispensados pelo leitor, sem perda de continuidade.

Existem, no texto, referências a notas de rodapé; em geral, de natureza bibliográfica. No fim de cada capítulo, há uma lista de leituras sugeridas. Há também algumas referências sobre a vasta literatura em periódicos do campo e obras em outras línguas.

O texto desta obra adere mais estritamente a um arranjo cronológico, dando ênfase aos elementos históricos. O objetivo do livro é apresentar a História da Matemática com fidelidade, não só para com a estrutura e exatidão matemáticas, mas também para com a perspectiva e detalhes históricos.

Capítulo I - Origens primitivas

Boa parte do que chamamos de Matemática, atualmente, deriva de ideias originalmente centradas nos conceitos de número, grandezas e formas. Algumas definições obsoletas da Matemática (ciência do número e grandeza) já não são válidas, apenas sugerem as origens dos diversos ramos da matemática. O desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual. O homem difere de outros animais, principalmente, pela capacidade de se comunicar pela linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato. As palavras que exprimem ideias numéricas, no entanto, apareceram mais lentamente.

O conceito de número inteiro é o mais antigo na Matemática; e sua origem se perde nas névoas da Pré-História. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e, em geral, não estava diretamente relacionada aos sistemas dos inteiros. Entre as tribos primitivas, parece não ter havido quase nenhuma necessidade de usar frações. As frações decimais foram, essencialmente, um produto da idade moderna da Matemática. Mas realizar muitas afirmações sobre as origens da Matemática (seja da Aritmética ou da Geometria) é arriscado, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

Capítulo 2 – Egito

As civilizações caracterizadas pelo uso de metais surgiram, primeiramente, em vales e rios, como os do Egito, Mesopotâmia, índia e China. Por isso, designaremos a parte mais antiga do período histórico pelo nome de "estágio mesopotâmico". Antes de 4.000 a.C, uma forma primitiva de escrita estava em uso tanto no vale da Mesopotâmia como no Nilo. Muito de nossas informações sobre a Matemática egípcia vem do Papiro *Rhind*, o mais extenso documento matemático do Antigo Egito. Muito dos cálculos apresentados nesse papiro são evidentes exercícios para jovens estudantes. A operação aritmética fundamental era a adição; e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas por sucessivas "duplicações".

Capítulo 3 – Mesopotâmia

O tipo de escrita cuneiforme (desenvolvida pelos sumérios durante o quarto milênio, muito antes de Abraão) pode ser a mais antiga forma de comunicação escrita. Provavelmente, é anterior à hieroglífica egípcia, que pode derivar dela. O uso antigo da escrita na Mesopotâmia é atestado por centenas de plaquetas de barro, encontradas em Uruk e com data de cerca de 5.000 anos atrás. Leis, registros de impostos, histórias, lições de escola, cartas pessoais; tudo isso e muitas outras coisas eram inscritas com um estilete nessas plaquetas de barro mole. Depois disso, eram cozidas ao sol ou em fornos.

Tais documentos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios e, por isso, existe muito mais documentação sobre a Matemática da Mesopotâmia que sobre a do Egito.

O sistema decimal, comum à maioria das civilizações antigas e modernas, é proveniente da Mesopotâmia, sob uma notação que dava a base 60 como fundamental.

Qualquer que tenha sido a origem, o sistema sexagesimal de numeração teve vida notadamente longa, pois, até hoje, seus restos permanecem nas unidades de tempo e nas medidas dos ângulos - apesar da forma fundamentalmente decimal de nossa sociedade.

A numeração cuneiforme babilônica, para os inteiros menores, seguia as mesmas linhas que a hieroglífica egípcia, com repetições dos símbolos para unidades e dezenas. A princípio, os babilônios não tinham um símbolo para o zero, embora às vezes deixassem um espaço vazio para indicar o zero. No entanto, ao tempo da conquista por Alexandre - o Grande, um símbolo especial, consistindo de duas pequenas cunhas colocadas obliquamente, foi inventado para marcar o lugar onde um numeral faltasse. O símbolo babilônico para o zero, aparentemente, não terminou de todo com a ambiguidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias. As operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje; e com facilidade comparável. Entre as plaquetas babilônicas, encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um certo número - semelhantes às nossas tabelas de logaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas onde são dadas as dez primeiras potências para as bases 9 - 16 -1,40 e 3,45 (todos quadrados perfeitos). A solução de equações quadráticas e cúbicas na Mesopotâmia é um feito notável; admirável não tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos.

Para os babilônios, a Geometria não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de Álgebra ou Aritmética aplicada, em que números são ligados a figuras. O conhecimento babilônico do Teorema de Pitágoras não se limitava ao caso do triângulo retângulo isósceles.

Capítulo 4- A Jônia e os pitagóricos

O mundo grego, por muitos séculos, teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helénica não estava só localizada ali. Em 600 a.C, colónias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo. Foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na Matemática. Diz-se que Tales de Mileto e Pítágoras de Samos, em suas passagens pelo Egito, aprenderam Geometria. Indo para a Babilónia, que estava sob o esclarecido governante caldeu Nabucodonosor, Tales provavelmente entrou em conta-to com tabelas e instrumentos astronômicos. O que se sabe sobre a vida e obra de Tales é realmente muito pouco. Tales era um homem de negócios e Pitágoras, um profeta e místico que fundou a escola pitagórica, cujo lema era "Tudo é Número", uma das questões mais importantes diz respeito à geometria pitagórica e à construção do pentagrama (ou pentágono estrelado).

A geometria tem dois grandes tesouros: 1) o Teorema de Pitágoras; 2) a divisão de um segmento em média e extrema razão (secção áurea). Supõe-se usualmente que a maior parte do conteúdo dos dois primeiros livros de Os *Elementos é* devida aos pitagóricos. O estudo das proporções ou das igualdades de razões, presumivelmente, formava, de início, uma parte da Aritmética ou Teoria dos Números Pitagóricos. Mais tarde, as quantidades a, ò e c (que entravam em tais proporções) seriam, provavelmente, olhadas como grandezas geométricas. De modo geral, parecem ter existido dois sistemas principais de numeração na Grécia: um, provavelmente o mais antigo, é conhecido como notação Ática (ou herodiânica); o outra é chamado Sistema Jônio (ou alfabético). Ambos possuem a base decimal, mas o primeiro é mais primitivo, baseado num esquema de interação, como a junção de símbolos na numeração hieroglífica primitiva do Egito, pois, aos numerais romanos.

Capítulo 5 - A Idade heroica

O quinto século a.C. foi um período crucial na história ocidental, pois foi iniciado com a derrota dos invasores persas e terminou com a rendição de Atenas a Esparta. No entanto, durante a segunda metade do quinto século, circularam relatos persistentes e consistentes sobre alguns matemáticos que estavam preocupados com certos problemas. Foram essas questões que formaram a base de grande parte dos desenvolvimentos posteriores na Geometria. Esse período foi chamado de "Idade Heroica da Matemática". São dessa época os três problemas famosos (ou clássicos):

• Quadratura do círculo.

• Duplicação do cubo.

• Trissecção do ângulo.

Cerca de 2.200 anos depois, seria provado que todos os três são impossíveis de resolver apenas com régua e compasso.

O Teorema de Hipócrates sobre as áreas de círculos parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego. Desse teorema, Hipócrates deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea da história da Matemática. Parece bem razoável supor que, ao menos, as formulações, de muito do que está nos livros III e IV de “Os Elementos”, provinham da obra de Hipócrates.

Pelo fim do quinto século a.C., existia em Atenas um grupo de mestres profissionais muito diferente dos pitagóricos. Os discípulos de Pitágoras estavam proibidos de aceitar pagamento para partilhar seus conhecimentos com os outros. Os sofistas, pelo contrário, abertamente se sustentavam dando aulas aos seus concidadãos. Entre esses estava Hípias, um dos mais antigos matemáticos que temos informação; nos diálogos de Platão encontramos muita coisa sobre ele (Platão se opunha totalmente aos sofistas em geral). Também é bom ter em mente que tanto Pitágoras, o pai dos sofistas) quanto Sócrates (seu arquiinimigo) eram contrários à Matemática e às Ciências. A Idade Heroica da Matemática produziu meia dúzia de grandes figuras;

entre esses, deve ser incluído Demócrito de Abdera, conhecido como filósofo da química. A chave para a matemática de Demócrito é encontrada em sua doutrina física do atomismo.

Capítulo 6 - A idade de Platão e Aristóteles

Platão é importante na História da Matemática, principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros. Talvez a ele mesmo se deva a distinção clara que se fez, na Grécia antiga, entre Aritmética (no sentido da Teoria dos Números) e Logística (a técnica de computação).

Platão considerava a Logística adequada para negociantes e guerreiros, que precisam aprender a arte dos números, ou não saberiam dispor suas tropas. Mas o filósofo, por outro lado, também precisava conhecer a Aritmética, "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser". Além disso, Platão afirma, na República, que a Aritmética tem um poder muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato. Platão teve grande influência para que a Matemática se tornasse parte essencial do currículo para a educação de homens do estado. Na juventude de Platão, a descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções. Mas a crise resultante do incomensurável foi enfrentada com sucesso, graças à imaginação de Eudoxo. Eudoxo deve ser lembrado na História da Matemática não só por seu próprio trabalho, mas também pelo de seus discípulos.

Aristóteles foi o homem mais erudito de todos os tempos. Sua morte é considerada como o marco do fim do primeiro grande período, a Idade Helênica. Aristóteles, assim como Eudoxo, foi discípulo de Platão. Mas também foi mestre de Alexandre, o Grande.
Aristóteles era, antes de tudo, um filósofo e um biólogo; mas estava completamente a par das atividades dos matemáticos.

Capítulo 7 - Euclides de Alexandria

Na história da civilização, costuma-se distinguir dois períodos no mundo grego: a parte mais antiga, chamada de Idade Helênica, e a segunda, Helenística ou Alexandrina (esta última ocorreu após as mortes, quase simultâneas, de Alexandre e Aristóteles.

Com a morte de Alexandre, seu império foi dividido entre os generais do exército grego e se desfez. Em Atenas, onde Aristóteles fora considerado um estrangeiro, o filósofo verificou que se tornara impopular. Acabou deixando Atenas e morreu no ano seguinte. O controle da parte egípcia do império coube a Ptolomeu I. Este governante criou em Alexandria uma escola (ou instituto) conhecida como *Museu*. Para ensinarem como professores, ele chamou um grupo de sábios de primeira linha. Entre eles, o autor do texto matemático mais bem sucedido de todos os tempos - Euclides. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Euclides e Elementos são, frequentemente, considerados sinônimos. Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje:

1) Os Elementos.

2) Os dados.

3) Divisão de figuras.

4) Os fenômenos.

5) Óptica.

A universidade de Alexandria não diferia muito das instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores, provavelmente, eram notáveis na pesquisa; outros, eram melhores como administradores; e outros, eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, Euclides pertencia à última categoria.

Capítulo 8 - Arquimedes de Siracusa

Durante toda a Idade Helenística, o centro de atividade matemática permaneceu em Alexandria. Mas o maior matemático desse tempo - e de toda a Antiguidade - não nasceu nessa cidade.

Arquimedes pode ter estudado por algum tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides. Também manteve comunicação com os matemáticos de lá. Mas foi em Siracusa que ele viveu e morreu.

Durante as Guerras Púnicas, a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago. Durante o cerco, Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para manter o inimigo a distância: catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; invenções para queimar os navios. Mas Arquimedes não foi o primeiro a usar alavancas, nem mesmo a formular a Lei Geral.

As obras de Aristóteles contêm a afirmação de que dois pesos, numa alavanca, se equilibram quando suas distâncias são inversamente proporcionais ao fulcro.

A obra de Arquimedes sobre a Lei da Alavanca faz parte de seus tratados. Ele pode ser chamado de Pai da Física Matemática não só por seu tratado "Sobre o equilíbrio de planos", mas também por outro, tratado em dois volumes: "Sobre corpos flutuantes".

Arquimedes, como seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas de Geometria, e a bem conhecida Espiral de Arquimedes. Forneceu soluções para dois deles. A obra *Sobre espirais* foi muito admirada, mas pouco lida, pois era considerada a mais difícil obra de Arquimedes. Além disso, nem todas as obras de Arquimedes chegaram até nós.

Capítulo 9 - Apolônio de Perga

Durante a Idade Helenística, três matemáticos se destacaram: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Deles, temos os títulos de muitas obras perdidas. Em alguns casos, sabemos qual o assunto do tratado, pois Papus deu uma breve descrição de alguns. Seis das obras de Apolônio estavam incluídas em dois dos tratados mais avançados de Euclides. Era uma coleção chamada Tesouro da Análise. Foram os tratados de Apolônio: *Lugares planos, Dividirem uma razão, Cortar uma área, Tangências, As Cónicas* (oito livros).

Esta última derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive As Cônicas de Euclides. Na Antiguidade, nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo.

Os Elementos, de Euclides, e *As Cônicas*, de Apolônio, foram, de longe, as melhores obras em seus campos. Os métodos de Apolônio, em muitos pontos, são tão semelhantes aos modernos que seu tratado chega a ser considerado como uma Geometria Analítica, antecipando Descartes em 1800 anos.

Capítulo 10 -Trigonometria e mensuração na Grécia

A Trigonometria, como os outros ramos da Matemática, não foi obra de um único homem - ou nação. Teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes já eram conhecidos e usados pêlos antigos egípcios e babiônios. As obras de Euclides não incluem a Trigonometria, no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. Aristarco, segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico; antecipando Copérnico em mais de um milénio e meio. Não se sabe bem quando surgiu, na Matemática, o uso sistemático do círculo de 360°, mas parece que este uso se deve, em grande parte, a Hiparco, através de sua tabela de cordas. Devemos lembrar que, desde os dias de Hiparco até os tempos modernos, não havia coisas como razões trigonométricas. Essas, a princípio, tiveram a forma de cordas num círculo. A Geometria grega parece não ter tido boa acolhida na Mesopotâmia até a conquista árabe. Os árabes nos contam que a "Fórmula de Heron" (para área do triângulo) já era conhecida por Arquimedes, mas a demonstração de Heron em sua *A métrica* é a mais antiga que temos.

Capítulo 11 - Ressurgimento e declínio da matemática grega

O período que consideramos neste capítulo, de Ptolomeu a Proclus, cobre quase quatro séculos. É neste peróodo que encontramos o maior algebrista grego. Diofante de Alexandria. E, ao fim desse período, apareceu o último geômetra grego importante, Papus de Alexandria. A principal obra que conhecemos de Diofante é a Arithimetica:

um tratado que era formado, originalmente, por 13 livros dos quais apenas os seis primeiros se preservaram.

Na Grécia antiga, a palavra "Aritmética" significava "Teoria dos Números". Nos seis livros preservados da Arithmetica, há um uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. A Coleção, o mais importante tratado de Papus, continha oito livros, mas o primeiro livro e a primeira parte do segundo livro se perderam. No livro 11 da Coleção, Papus faz uma distinção clara entre problemas planos, sólidos e lineares. Os primeiros eram construtíveis apenas com régua e círculos; os segundos, resolúveis por uso de secções cônicas; os terceiros exigiam outras curvas que não retas, círculos e cônicas.

Os Livros VI e VIII da Coleção tratam principalmente de aplicações da Matemática à Astronomia, à Óptica e à Mecânica.

Capítulo 12-China e Índia

As civilizações da China e da India são mais antigas que as da Grécia e Roma, porém não mais que as do Vale do Nilo e Mesopotâmia. A invenção e a origem da Matemática chinesa, em geral, parece ter sido independente de influência ocidental.

Tanto nas obras chinesas como nas egípcias, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. A numeração chinesa permaneceu essencialmente decimal, com notações marcadamente diferentes das de outros países. Possuía símbolos diferentes para os dígitos de um a dez e símbolos adicionais para as potências de dez; predominava o princípio multiplicativo e o posicionai.

Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum.

O Ssu-yüan yü-chien (precioso espelho dos quatro elementos) é o item de maior interesse histórico e matemático, sendo datado de 1.303 a.C. Os quatro elementos (céu, terra, homem e matéria) são as representações de quatro incógnitas na mesma equação. O livro representa o ápice do desenvolvimento da Álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equações que vão até o 14° grau.

A índia, assim como o Egito. tinha seus "estiradores de corda". Tinha também as primitivas noções geométricas; adquiridas por causa das construções (e medidas) dos templos e altares. Em uma das versões da obra Sulvasutras, (datando, talvez, do tempo de Pitágoras). encontramos regras para a construção de ângulos retos por meio de trenas de corda.

Mesmo que os hindus tenham adquirido seus conhecimentos trigonométricos do helenismo cosmopolita de Alexandria, o material em suas mãos tomou uma forma nova. A Trigonometria hindu era um instrumento útil e preciso para a astronomia. A segunda metade do Aryabhatiya trata da medida do tempo e de Trigonometria Esférica. Há indicações de que o sistema de numeração hindu fosse decimal, posicionai, aditivo e multiplicativo.

Era do conhecimento hindu as operações fundamentais e a Álgebra. Diferentemente dos gregos, os hindus consideravam, como números, as raízes irracionais.

Bhaskara foi o último matemático medieval importante na índia. Em sua obra, oLilauati, compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias e novas. Esta obra contém tópicos sobre: equações lineares e quadráticas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

Capítulo 13 - A hegemonia árabe

Com a expansão das conquistas árabes, as constantes lutas entre si e a guerra contra seus inimigos, que duraram mais de um século (por volta de 750 a.C.), o califa al-Mansur estabeleceu uma nova capital em Bagdá, cidade que logo se transformaria no novo centro da Matemática. Os árabes eram rápidos na absorção da cultura dos vizinhos que conquistavam: sírios, gregos, egípcios, persas, turcos e muitos outros, Bagdá, nesse tempo, trouxe para si estudiosos da Síria e Mesopotâmia; e foi estabelecida uma "Casa da Sabedoria", comparável ao antigo Museu de Alexandria.

Entre os mestres, havia um matemático e astrónomo, AI-Khowarizmi, cujo nome, como o do Euclides, iria tornar-se familiar na Europa Ocidental. Além de tabelas astronômicas e tratados sobre o astrolábio e o relógio do sol, AI-Khowarizmi escreveu dois livros sobre Aritmética e Álgebra que tiveram papéis muito importantes na História da Matemática.

Capítulo 14- A Europa • Idade Média

Para a História da Matemática, o período antigo encerra-se no ano de 524. É o mesmo ano da morte de Boécio e é a mesma época em que o abade romano Dionísio propôs a cronologia baseada na era cristã. Inicia-se, então, o período medieval, que se estende até 1436.

Durante esse período, os que se destacavam em matemática escreviam em árabe e viviam na Ásia e na África islâmicas. Diz-se que, pelo fim da Idade Média, havia duas espécies de matemáticos: os das escolas religiosas / universidades e os que se ocupavam de negócios e comércio; e havia rivalidade entre as duas.

No século XIII, autores de várias classes sociais ajudaram a popularizar o "algarismo". Entre eles, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. O livro em que Fibonacci descreve o novo algarismo é um clássico célebre -*Líber Abaci.* Este não é sobre o ábaco, é um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos, em que o uso de numerais indoarábicos é fortemente recomendado. Fibonacci era um algebrista, mas escreveu também um livro intitulado *Practica Geometriae.* Esse parece ser baseado numa versão árabe da *Divisão de Figuras,* de Euclides (hoje perdida) e nas obras de Heron sobre mensuração.

Capítulo 15- 0 Renascimento

O primeiro livro impresso na Eu-Ocidental data de 1.447. E pelo fim do século, mais de 30.000 edições de várias obras já estavam circulando. Dessas, poucas eram obras matemáticas; mas essas poucas, junto com os manuscritos existentes forneceram uma base para expansão. Durante 100 anos após a queda de Constantinopla, as cidades da Europa central (notadamente Viena, Cra-cóvia, Praga e Nuremberg) foram líderes em Astronomia e Matemática. Mas foi a Alemanha e a Itália que forneceram a maior parte dos matemáticos do início da Renascença.

Em 1.484 foi composta, na França, a obra intitulada *Triparty em Ia science dês nombres,* escrita por Nicolas Chuquet. A primeira das três partes diz respeito às operações aritméticas racionais sobre os números, incluindo uma explicação dos numerais indoarábicos. A segunda parte trata de raízes de números. E a última parte, sem dúvida a mais importante, diz respeito à *Regle dês pre-miers,* isto é, a "regra da incógnita", ou o que chamaríamos de Álgebra. A segunda metade da última parte trata da resolução de equações.

A primeira metade do século XVI viu surgir uma nuvem de álgebras alemãs, entre as mais importantes delas está a *Arithmetica Integra,* de Michael Stifel, na qual inclui o triângulo de Pascal e o tratamento dos números negativos, radicais e potências. São também dessa época Cardano e Tartaglia. que deram um grande impulso à pesquisa em Álgebra com a resolução de equações cúbicas e quadráticas. Outro importante algebrista, Rafael Bombelli, mostrou, com seu engenhoso raciocínio, o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro.

A Geometria Pura no século XVI não ficou inteiramente sem representantes. A obra de Werner se relaciona de perto com os estudos sobre cônicas da Antiguidade.

A Matemática, durante a Renascença, foi largamente aplicada à Contabilidade, Mecânica, mensuração de terras, Arte, Cartografia, óptica - e havia numerosos livros tratando das Artes Plásticas. No entanto, o interesse pelas obras clássicas permanecia forte. A Geometria, na primeira metade do século XVI, dependera exclusivamente das propriedades elementares ensinadas em Euclides. Werner fora uma exceção.

Capítulo 16-Prelúdio à matemática moderna.

A transição da Renascença para o mundo moderno também se fez através de um grande número de figuras intermediárias como: Galileu Galilei, Cavalieri, Stevin, Qirard, John Napier Johann Kepler e François Viète.

Foi a Álgebra de Viète que forneceu contribuições mais consistentes para a época, pois foi a que chegou mais perto das ideias modernas. Para ele, Matemática é uma forma de raciocínio e não uma coleção de truques, como Diofante imaginava. Viète sugeriu um novo modo de abordar a resolução das cúbicas e interpretou as operações algébricas fundamentais algebricamente. Viète foi o fundador de uma Álgebra literal e usou a Trigonometria como ferramenta para a Álgebra.

John Nepier, proprietário escocês, só se interessava por certos aspectos da Matemática, particularmente os que se referiam à Computação e à Trigonometria. As "Barras de Napier" eram bastões em que itens de tabuadas de multiplicação eram esculpidos - serviam ao uso prático. Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados. Ele afirma que o conceito de função logarítmica está implícito ao longo de toda sua obra de logaritmos. O panfleto de Galileu (de 1.606) sobre o compasso geométrico foi seu único tratado estritamente matemático.

Stevin se interessava pelas aplicações da Física, repleta de elementos infinitamente pequenos. Desde 1.604, Kepler se envolvera com seções cônicas em seus trabalhos de óptica, analisando as propriedades dos espelhos parabólicos. A ideia de que a parábola tem dois focos (e um deles tendendo ao infinito) deve-se a Kepler. Mas enquanto Kepler estudava barris de vinho, Galileu estivera observando os céus com um telescópio e rolando bolas sobre planos inclinados. Os resultados desses esforços foram dois famosos tratados: um de Astronomia e outro de Física.

Capítulo 17-O tempo de Fermat e Descartes

A França é que veio a ser o disputado centro da Matemática durante o segundo terço do século XVII. As figuras principais foram René Descartes e Pierre de Fermat. Mas outros franceses também fizeram contribuições importantes: Torricelli, Roberval, Qirard Desargues e Blaise Pascal. Nessa época, ainda não existiam organizações de matemáticos profissionais. Mas na Itália, França e Inglaterra já havia grupos científicos mais ou menos organizados.

A principal contribuição de Descartes à Matemática foi a fundação da Geometria Analítica. Sua obra, *La Géométrie*, levou a Geometria Analítica ao conhecimento de seus contemporâneos. Esta obra não foi apresentada ao mundo como um tratado isolado, mas como um dos três apêndices do Discours de Ia Méthode, em que ele apresenta ilustrações de seu método filosófico geral. Os outros dois apêndices eram La Dioptrique (contendo a primeira publicação da Lei de Refração) e Lês météores (contendo, entre outras coisas, a primeira explicação quantitativa satisfatória do arco-íris).

Praticamente toda a *La Géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da Álgebra à Geometria e da Geometria à Álgebra. Mas há pouca coisa, nesse tratado, que se assemelha ao que, hoje, se considera como Geometria Analítica. E uma pena que Fermat não tenha publicado quase nada em toda sua vida, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes. Além disso, sua Geometria Analítica era um tanto mais próxima da nossa: as duas concepções se aproximavam pelo fato de as ordenadas serem usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas.

Como Descartes, Fermat percebia a existência de uma Geometria Analítica com mais de duas dimensões. Fermat se ocupara de muitos aspectos da análise infinitesimal - tangentes, quadraturas, volumes, comprimentos de curvas, centros de gravidade. O tratado dado por Desargues às cônicas é muito belo, embora sua linguagem não seja convencional. Aos 14 anos, Blaise, juntamente com seu pai, participou das reuniões informais da Academia de Mersenne, em Paris. Nessa academia, veio a conhecer as ideias de Desargues. Aos 18 anos, dedicou-se a planejar uma máquina de calcular e, nos anos seguintes, conseguiu construí-la e vendeu cerca de 50 dessas máquinas.

Capítulo 18- Um período de transição

Durante o período que estamos considerando - o intervalo entre Descartes e Fermat, de um lado; Newton e Leibniz, de outro - havia duas regiões, em particular, onde a Matemática estava florescente: a Grã- Bretanha e os Países Baixos. Dois assuntos eram muito populares nesse período: Geometria Analítica e a Análise Matemática. A Geometria de Descartes foi muito difundida. De todos os matemáticos que anteciparam partes do cálculo diferencial e integral, ninguém chegou mais perto dessa nova Análise que Barrow. Ele parece ter reconhecido claramente a relação inversa entre os problemas de tangente e de quadraturas.

Capitulo 19-Newton e Leibniz

Durante o período entre 1.665 e 1.666, logo depois de Newton ter se formado, o Trinity College foi fechado por causa da peste e Newton foi para casa viver - e pensar. O resultado foi o período mais produtivo de descobertas matemáticas jamais registradas. Foi durante esses meses que ele fez quatro de suas principais descobertas:

1) O Teorema Binomial.

2) O cálculo.

3) A Lei de Gravitação.

4) A Natureza das Cores.

O Teorema Binomial foi transcrito numa carta e enviado a Leibniz. Numa segunda carta a Leibniz, Newton explicou, detalhadamente, como tinha chegado a essa série binomial. Mas o próprio Newton nunca publicou esse teorema, nem o provou. Mesmo assim, redigiu e publicou várias exposições de sua análise infinita.

A *De Analysi*, de Newton, tinha mais conteúdo do que qualquer outro trabalho sobre séries infinitas. A primeira exposição do cálculo que Newton imprimiu foi o mais admirado tratado científico de todos os tempos onde apresentou os fundamentos da Física e da Astronomia na linguagem da Geometria Pura.

Leibniz aos 17 anos, obteve o grau de bacharel. Aos 20, estava preparado para o grau de doutor em direito, mas este lne foi recusado por causa de sua pouca idade. Entrou no serviço diplomático e tornou-se membro da *Royal Society*. Em 1.676, visitou Londres, trazendo consigo sua máquina de calcular. Durante esses anos, entre suas duas visitas a Londres, o Cálculo Diferencial tomou forma. De seus estudos sobre séries infinitas e o triângulo harmônico, Leibniz se voltou para a leitura das obras de Pascal sobre a cicloide e outros aspectos da análise infinitesimal. Por volta de 1.676, chegou à mesma conclusão que Newton chegara vários anos antes: quer uma função fosse racional ou irracional, algébrica ou transcendente (palavra que Leibniz inventou), as operações de somas e diferenças podiam sempre ser aplicadas. A grande contribuição de Leibniz à Matemática foi o cálculo, mas ele também era filósofo. Por isso, sua contribuição mais significativa à Matemática foi em lógica.

Capítulo 20 - A Era Bernoulli

As contribuições matemáticas dos Bernoulli, assim como as de Leibniz, se encontram, principalmente, em artigos e revistas, especialmente a *Acta Eruditorum*. Mas Jacques Bemoulli também escreveu um tratado clássico chamado *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar); este é o mais antigo volume substancial sobre a Teoria das Probabilidades. A segunda parte desse tratado contém também os "números de Bernoulli". Estes surgiram como coeficientes numa fórmula de recorrência para as somas das potências dos inteiros que, hoje, encontram aplicações em outras questões. Jeán Bernoulli também escreveu dois pequenos textos sobre o cálculo diferencial e integral e, enquanto se encontrava em Paris (1692), ensinou a um jovem marquês francês (G.F.A., de LHospital) a nova disciplina leibniziana.

Jean Bemoulli assinou um pacto pelo qual, a troco de um salário regular concordava em enviar a L"Hospital suas descobertas matemáticas, para que fossem usadas como o marquês desejasse. O resultado foi uma das mais importantes contribuições de Bernoulii: *A Regra de LHospital.* Todos os filhos de Jean (Nicholas, Daniel e Jean II) ocuparam postos de professores de Matemática. Destes, o que mais se destacou foi Daniel Bernoulii, pois é lembrado, principalmente, por ter feito a distinção entre a Teoria das Probabilidades, entre a "esperança matemática" e a "esperança moral"; ou entre "fortuna física" e "fortuna moral". A Teoria das Probabilidades teve numerosos devotos durante o começo do século XVIII: e um dos mais importantes foi De Moivre, que produziu uma quantidade de pesquisa considerável. De Moivre, ao lidar com números imaginários e funções circulares, chegou quase a reconhecer as funções hiperbólicas.

Ao tempo em que os Bernoulli, e seus associados, estavam defendendo os desenvolvimentos na Geometria Analítica, Cálculo e Probabiliddes, a Matemática na Itália fluía mais ou menos sem destaque, com alguma preferência pela Geometria.

Capítulo 21 - A Idade de Euler

As obras de Euler também marcaram época. Pode ser dito com justiça que Euler fez, pela análise infinita de Newton e Leibniz, o que Euclides fizera pela Geometria de Eudoxo e Teaetetus; ou o que Viète fizera pela Álgebra de al-Khowarizmi e Cardano.

Os três símbolos, e - p - i. pelos quais Euler, em grande parte, é responsável, podem ser combinados com os dois inteiros mais importantes, O e l, na célebre igualdade ep + 1=0, que contém os cinco números mais significativos (bem como a mais importante relação e equação) em toda a Matemática.

Com sua audácia, através das manipulações de séries infinitas, Euler obteve resultados que tinham fugido de seus predecessores. O tratamento imaginativo que deu às séries o levou a algumas notáveis relações entre a Análise e a Teoria dos Números. Para a Teoria dos Logaritmos, contribuiu não só com a definição em termos de expoentes (que usamos hoje), mas também com a ideia correta quanto aos logaritmos de números negativos.

Euler, os Bernoulli e D'Alambert, por terem uma instrução ampla - em Direito, Medicina, Ciências e Matemática -. colaboraram com Denis Diderot nos 28 volumes da célebre *Encyclopédie* (ou *Dictionnaire Raisonné dês Sciences, dês Arts et dês Métiers*).

Para a *Encyclopédie*, D'Alambert escreveu o muito admirado Discours Préliminaire, bem como a maior parte dos artigos matemáticos e científicos. D'Alambert tornou-se um dos que abriram caminho para a Revolução Francesa. Ele gastou muito tempo e esforço tentando provar o teorema conjectu-rado por Girard. Atualmente, esse teorema é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra: toda equação polinomial f (x) = O com coeficientes complexos de grau $n^{3}1$ tem, pelo menos, uma raiz complexa. Hoje, D'Alambert talvez seja mais conhecido pelo que se chama "Princípio D'Alam-bert" - As ações e reações internas de um sistema de corpos rígidos em movimento estão em equilíbrio.

Capítulo 22 - Matemáticos da Revolução Francesa

São eles: Monge, Lagrange, Laotace, Legendre, Carnot e Condorcet.

Um dos resultados mais tangíveis da Revolução foi o sistema métrico como conhecemos hoje. Condorcet é mais lembrado como pioneiro em Matemática Social, especialmente peta aplicação das probabilidades e estatísticas aos problemas sociais. Com o inicio da Revolução, os pensamentos de Condorcet se voltaram para problemas administrativos e políticos. Em 1.792, publicou seu plano, mas a ideia de instrução gratuita foi alvo de ataques. Somente anos depois de sua morte, a França realizou o ideal de Condorcet: instrução pública gratuita. Monge foi o principal advogado de instituições mais avançadas de ensino. Em 1.794, como membro ativo da Comissão de Obras Públicas, participou da criação da famosa École Polytechnique, na qual foi tanto administrador como professor. Nessa escola, ensinou estereotomia (hoje Geometria Descritiva). Além do estudo de sombra, perspectiva e topografia, dava atenção às propriedades das superfícies (incluindo retas normais e planos tangentes) e à Teoria das Máquinas.

Outra escola da época, a *École Normale*, tinha em seu corpo docente Monge, Lagrange, Legendre e Laplace. Monge publicou *Geometrie Descriptive*, com apontamentos de suas aulas nesta escola. Por outro lado, com os apontamentos de aula do curso sobre "Aplicação da Análise à Geometria", ", ministrado na *École Polytechnique*, publicou uma obra com o título de "Geometria Analítica". Carnot era um soldado, um político e um geômetra. Mas era também um especulador. Carnot não foi o único desse grupo de revolucionários a sentir a necessidade de maior rigor na Matemática: Legendre escreveu que sua intenção era fazer um livro muito rigoroso.

Os campos em que Legendre fez contribuições significativas foram:

1) Equações diferenciais.

2) Cálculo.

3) Teoria das Funções.

4) Teoria dos números.

5) Matemática Aplicada.

Compôs um tratado em três volumes: *Exercices du Calcul Integral*, que rivalizava com o de Euler. Legendre foi uma figura importante em geodesia. E, ligado a isso, ele desenvolveu o método estatístico dos mínimos quadrados.

Lagrange foi professor nas duas escolas. Para os estudantes da École Normale, ele ministrou aulas que, hoje, seriam adequadas para uma classe colegial (Álgebra avançada); para os estudantes no nível mais avançado da *École Polytechnique*, deu um curso de Análise e preparou o que, a partir daí, foi considerado um clássico da Matemática. Todas suas anotações de aula , foram publicadas. Lagrange é, em geral, considerado o mais notável matemático do século XVIII, sendo somente Euler um sério rival. Suas publicações versavam sobre: cálculo de variações, Mecânica, o problema dos três corpos. Também publicou suas primeiras ideias sobre as funções derivadas; e a Teoria das Equações. Laplace também ensinou nessas escolas. A Teoria das Probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. Sua obra, Théorie Analytique, mostra a mão de um mestre da Análise que conhece o cálculo avançado.

Capítulo 23 - O tempo de Gauss e Cauchy

Gauss foi considerado o maior matemático do século XIX e, provavelmente, de todos os tempos. A tese de doutorado de Gauss provou que toda equação polinomial f(x) = 0 tem, pelo menos, uma raiz, quer os coeficientes sejam reais ou imaginários; ou seja, é o próprio Teorema Fundamental da Álgebra.

A prova desse teorema, dada por Gauss na tese, baseia-se, em parte, em considerações geométricas. Anos depois, Gauss publicou duas novas demonstrações, esforçando-se por encontrar uma prova inteiramente algébrica. Dois anos depois do aparecimento de sua tese, publicou seu livro mais conhecido: um tratado, em Latim, sobre a Teoria dos Números. Essa obra é a principal responsável pelo desenvolvimento da linguagem e notação do ramo da *Teoria dos Números*, mais conhecida como *Álgebra das Congruências*.

Essa nova concepção de Álgebra fornece um exemplo de classes de equivalência. Nessa obra, Gauss incluiu a primeira descoberta importante que fizera em matemática: a construção do polígono regular de 17 lados.

Cauchy estudou e depois foi professor na École Polytechnique, sendo discípulo de Lagrange e Laplace. Seguia a tradição de Lagrange em sua preferência por Matemática Pura em forma elegante, com a devida atenção a provas rigorosas. Tudo o que produzia era logo publicado. Ele deu ao Cálculo Elementar o caráter que tem hoje, tornando fundamental o conceito de limite de D'Alambert. Mas também lhe deu um caráter aritmético de maior precisão.

Durante o século XVIII, a Integração fora tratada como inversa da Diferenciação. A definição de Cauchy torna claro que a derivada não existe num ponto em que a função seja descontínua. No entanto, a integral pode não causar dificuldades. Mesmo curvas descontínuas podem determinar uma área bem definida.

O nome de Cauchy aparece, hoje, ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas.

Capítulo 24 - A Idade na geometria

Uma característica importante da Geometria, da segunda metade do século XIX, era o entusiasmo com que eram estudadas as transformações de tipos variados.

Um dos mais populares dentre esses grupos de transformações era formado pelo que, atualmente, se chama Geometria Projetiva, que já fora anunciada na obra de Pascal e Desargues. Mas somente no começo do século XIX é que foi, sistematicamente, desenvolvida, especialmente por Poncelet. Outra característica importante foi o surgimento da Geometria não-euclidiana. Lobachevsky, em 1829, publicou um artigo (On the Principes of Geometry) que marca oficialmente o nascimento da Geometria não-euclidiana. Seu passo revolucionário foi publicar uma geometria especificamente construída sobre uma hipótese em conflito direto com o postulado das paralelas. Este postulado afirma que, por um ponto C, fora de uma reta AB, pode-se traçar mais de uma reta no plano, não encontrando AB.

Com esse novo postulado, Lobachevsky deduziu uma estrutura geométrica harmoniosa, sem contradições lógicas inerentes. Era, em todos os sentidos, uma geometria válida, mas ela parecia tão contrária ao senso comum que o próprio Lobachevsky a chamou de "geometria imaginária". A Geometria não-euclidiana, por várias décadas, foi considerada um aspecto da Matemática um tanto à margem; até ser completamente integrada através das ideias de Riemann.

Ao mostrar que a soma de mais de dois ângulos retos pode ser realizada sobre a superfície de uma esfera, Riemann provou a consistência dos axiomas de que a Geometria náo-euclidiana deriva.

Capítulo 25 - A aritmetização da Análise

A palavra chave da *Análise* é “função”, e foi especialmente no esclarecimento desse termo que surgiu a tendência à aritmetização.

Riemann era um matemático de interesses múltiplos e mente fértil, contribuindo não só para a Geometria e a Teoria dos Números como também para a Análise. Em Análise, é lembrado por seu papel no refinamento da Definição de Integral, pela ênfase que deu às equações de Cauchy-Riemann e pelas "superfícies de Riemann".

A Teoria dos Números trata, primariamente, dos inteiros ou, mais de modo geral, das razões dos inteiros: os chamados números racionais. Tais números são sempre raízes de uma equação linear $ax + b = 0$, com coeficientes inteiros.

A Análise real lida com um tipo de número mais geral, que pode ser racional ou irracional, uma causa de preocupação que estava no cerne do programa de aritmetização era a falta de qualquer definição da expressão "número real".

Os números reais podem ser subdivididos em dois tipos, de dois modos diferentes:

1 Como racionais e irracionais.

2 Como algébricos e transcendentes.

Cantor mostrou que, mesmo a classe dos números algébricos (muito mais geral que a dos racionais), ainda tem a mesma potência que a dos inteiros. Portanto, são os números transcendentais que dão ao sistema dos números reais a "densidade", que resulta em maior potência. Os incríveis resultados de Cantor o levaram a estabelecer a Teoria dos Conjuntos como um ramo da Matemática. Foi completamente desenvolvida e, em meados do século XX teria efeitos profundos sobre o ensino da Matemática.

Capítulo 26 - O surgimento da Álgebra abstrata

Em meados do século XIX, a Álgebra foi quase um monopólio britânico. Cayley foi um dos primeiros a estudar as matrizes: um exemplo da preocupação britânica com a forma e a estrutura na Álgebra. Enquanto os matemáticos Cayley e Hamilton estavam desenvolvendo dois novos tipos de Álgebra, uma terceira forma de Álgebra, radicalmente diferente, estava sendo inventada por um inglês praticamente autodidata, George Boole. Ele mostrou que sua Álgebra fornecia um algoritmo simples para raciocínios silogísticos.

Hoje, a Álgebra Booleana é largamente usada não só por matemáticos puros, mas também por outros, que a aplicam aos problemas de seguros e de Teoria da Informação. Entre os que continuaram a obra de Boole, após sua morte, estavam De Morgan e Benjamin Pierce. Esses dois descobriram, independentemente, a chamada Lei de Dualidade de De Morgan.

A multiplicidade de álgebras inventadas no século XIX poderia ter dado à Matemática uma tendência centrífuga se não tivessem sido desenvolvidos certos conceitos estruturais.

dm dos mais importantes desses conceitos foi a noção de grupo, pois foi, sem dúvida, a força mais importante para a coesão; foi também um fator essencial no surgimento das ideias abstratas. Não houve uma pessoa responsável pelo surgimento da ideia de grupo, mas a figura que mais se sobressaiu nesse contexto foi Évariste Galois.

As preocupações com a estrutura e o surgimento de novas álgebras, especialmente durante a segunda metade do século XIX, levaram a amplas generalizações quanto ao número e à geometria. A Itália reduziu sua participação no desenvolvimento da Álgebra abstrata; mais que a França, a Alemanha e a Inglaterra. Durante os últimos anos do século XIX, contudo, surgiram matemáticos italianos que se interessaram profundamente pela lógica matemática. O mais conhecido foi Giuseppe Peano, cujo nome é lembrado por associação aos axiomas de Peano, dos quais dependem tantas construções rigorosas de Álgebra e da Análise.

Capítulo 27 - Aspectos do século XX

uma das contribuições definitivas do século XIX foi o reconhecimento de que a Matemática não é uma ciência natural, mas uma criação intelectual do homem.

Poincaré pode ser considerado como um matemático que simbolizou a transição do século XIX e XX. Sua tese de doutorado fora sobre equações diferenciais (não método de resolução, mas teorema de existência), que levaram a uma de suas mais célebres contribuições à Matemática - as propriedades das funções automorfas. Na verdade, ele foi, virtualmente, o fundador da teoria dessas funções.

O outro matemático foi Hilbert. Hilbert legou à Matemática muito mais que uma coleção de problemas. Ele publicou um volume pequeno, mas famoso, chamado Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria), e tornou-se o principal representante de uma "escola axiomática". Essa escola foi influente na formação de atitudes contemporâneas e no ensino da Matemática.

Hilbert se interessava por todos os aspectos da Matemática Pura. Seu nome está ligado a uma curva simples, que enche um espaço e é mais fácil de descrever que a semelhante dada por Peano. Hilbert, como Poincaré, era um matemático de muitas facetas; ele contribuiu com a Teoria dos Números, a lógica matemática, as equações diferenciais, o problema dos três corpos e outros aspectos da Física matemática.

O alto grau de abstração formal que se introduziu na Análise, Geometria e Topologia, no começo do século XX, não podia deixar de invadir a Álgebra. O resultado foi um novo tipo de Álgebra, às vezes, inadequadamente, descrita como Álgebra Moderna. A Teoria dos Conjuntos e a Teoria da Medida invadiram uma grande parte da Matemática. O primeiro ano desse século foi auspicioso para as Probabilidades, tanto na Física quanto na Genética. A Teoria da Medida e a extensão do conceito de Integração promoveram uma associação mais íntima entre Análise e Probabilidades, especialmente depois da metade do século XX. As Probabilidades e a Estatística, no século XX, estão intimamente ligadas não só com a Matemática Pura, mas também com uma característica notavelmente diferente de nosso tempo - uma crescente dependência dos computadores.

A eletricidade alterou tanto nosso modo de viver que, frequentemente, se diz que vivemos numa era elétrica. Agora os aparelhos eletrônicos podem estar a ponto de alterar grande parte de nosso desenvolvimento matemático.

3. COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

Síntese elaborada por Wanda Silva Rodrigues

A obra contém os conceitos fundamentais da Matemática. Os capítulos III, IV e V podem ser utilizados para um curso de Geometria e os capítulos VI a VIII, juntos, formam uma apresentação independente do Cálculo, com ênfase na compreensão e não na rotina.

Os autores iniciam a obra analisando historicamente a Matemática, e constatando que todo o desenvolvimento nesta disciplina tem suas raízes psicológicas em exigências mais ou menos práticas. Esta tendência da ciência, voltada para a teoria, aparece na História Antiga e, também, em muitas contribuições de engenheiros e físicos à Matemática moderna. A Matemática registrada inicia-se no Oriente, onde, por volta de 2000 a.C., os babilônios colecionaram uma grande quantidade de material que hoje classificamos como álgebra elementar. Como ciência, a Matemática, no sentido moderno, emergiu somente mais tarde, em solo grego, durante os séculos V e VI a.C., na época do império persa. Alcançou o auge no período que se seguiu às expedições de Alexandre, que tornaram os gregos familiarizados com as realizações da

Matemática e da Astronomia babilônicas. A Matemática foi logo submetida à discussão filosófica que florescia nas cidades-estados gregas.

Talvez, a antiga descoberta de dificuldades e quantidades tidas como incomensuráveis impediram que os gregos desenvolvessem o cálculo numérico, alcançado antes no Oriente. Ao invés disso, os gregos forçaram seu caminho através da intrincada Geometria axiomática pura. Por quase dois mil anos, o peso da tradição geométrica grega retardou a inevitável evolução do conceito de número e da manipulação algébrica, que mais tarde constituiu a base da Ciência moderna. A revolução na Matemática, e na Ciência, iniciou sua vigorosa fase, no século XVII, com a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral, enquanto que o ideal grego de cristalização axiomática e dedução sistemática desapareceu nos séculos XVII e XVIII. Raciocínios logicamente precisos começavam com definições claras e não contraditórias. Axiomas evidentes pareciam irrelevantes aos pioneiros da Ciência Matemática.

No século XIX, por causa da Revolução Francesa, torna-se iminente a necessidade de consolidação e o desejo de maior segurança na extensão de conhecimentos mais avançados. Foi isso que reconduziu a uma revisão dos fundamentos da nova Matemática, em particular do Cálculo Diferencial e Integral e o conceito subjacente de limite. Assim, o século XIX não apenas se tornou um período de novos avanços, mas foi também caracterizado por um retorno bem sucedido ao ideal clássico da precisão e da prova rigorosa.

Num futuro imediato, a tarefa suprema da Matemática pode se estabelecer, mais uma vez, como a união orgânica entre Ciência pura e aplicada, de forma a criar um sólido equilíbrio entre generalidades abstratas e individualmente coloridas.

Capítulo I - Os números naturais

Criados pela mente humana, para contar objetos em coleções diversas, os números não contêm qualquer referência às características individuais dos objetos contados.

Somente em estágio bastante avançado do desenvolvimento intelectual é que o caráter abstrato da ideia de número se torna claro.

A teoria matemática dos números naturais, ou inteiros positivos, é conhecida como Aritmética e se baseia no fato de que a adição e a multiplicação de inteiros obedecem a certas leis.

Leis fundamentais da Aritmética

1) a + b = b + a

2) ab = BA (leis comutativas)

3) a + (b + c) = (a + b) + c

4) a (bc) = (ab) c (leis associativas)

5) a (b + c) = ab + AC (lei distributiva)

Estas leis da Aritmética são muito simples e podem parecer óbvias, mas elas podem não ser aplicáveis a certas entidades que não sejam os números inteiros. Por exemplo: se alguém adicionar ácido sulfúrico à água, obterá uma solução diluída, enquanto que a adição de água ao ácido sulfúrico puro pode resultar num acidente para o experimentador. Neste tipo "aritmética" química, as leis associativas e distributivas de adição podem não funcionar. Com base na definição de adição de dois inteiros, podemos definir a relação de desigualdade e operação de subtração.

A representação dos inteiros

O sistema posicional possui agradável propriedade de que todos os números, grandes ou pequenos podem ser representados utilizando-se um reduzido conjunto de diferentes algarismos (no sistema decimal são os "algarismos arábicos"). A isso se agrega a vantagem mais importante: a facilidade de cálculo.

O cálculo numérico em outros sistemas

Em um sistema diferente do decimal, as regras de Aritmética são as mesmas.

A infinidade do sistema numérico. O princípio da indução matemática

A sequência de inteiros representa o exemplo mais simples e natural do infinito matemático, que desempenha um papel dominante na Matemática moderna.

Suplemento ao capítulo 1 A teoria dos números - Os números primos

Fatos fundamentais:

1) Números que não podem ser decompostos são conhecidos como números primos ou simplesmente primos.

2) um inteiro (diferente de 0 ou 1) que não seja primo é chamado de composto.

Existem infinitos números primos, uma lista de todos os primos, até qualquer inteiro *n* dado, pode ser elaborada utilizando-se o "crivo de Eratóstenes".

Uma interessante questão da teoria dos números está relacionada ao teorema de Pitágoras, que é expresso algebricamente pela equação: $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo e c, o comprimento da hipotenusa.

O algoritmo de Euclides

Se a é qualquer inteiro e b é qualquer número inteiro maior do que 0, então podemos sempre encontrar um inteiro q tal que a = b.q + r, onde *r* é um inteiro que satisfaz a desigualdade 0 < r < b. Há apenas um número finito de divisores comuns de *a* e de *b*, e destes, *d* é o maior. O inteiro *d* é denominado de máximo divisor comum de a e de b. Escreve-se d = (a,b).

Dois inteiros a e b são relativamente primos quando seu máximo divisor comum é 1 $\rightarrow$ (a, b) = 1.

Capítulo 2

O sistema numérico da Matemática. Os números racionais como instrumento de medida

O processo de contar unidades não é suficiente quando a quantidade dada não for exatamente mensurável em termos de múltiplos inteiros da unidade escolhida. Quando isto ocorre, damos um outro passo e introduzimos novas subunidades, obtidas mediante a divisão da unidade original em um número *n* de partes iguais.

Em linguagem comum, estas novas subunidades têm nomes especiais. Por exemplo: o pé é dividido em 12 polegadas; o metro, em 100 centímetros; a libra, em 16 onças; a hora, em 60 minutos; o minuto, em 60 segundos etc.

No simbolismo da Matemática, essa divisão é representada por 1/n. Este símbolo é denominado de *fração* ou *razão* (algumas vezes escrito *m:n*). Quando *m* e *n* são números naturais, o símbolo *m/n* é denominado de número racional.

A utilização da palavra número para estes novos símbolos é justificada pelo fato de que a adição e a multiplicação destes símbolos obedecem às mesmas leis que orientam as operações com números naturais.

Necessidade intrínseca dos números racionais - O princípio da generalização

Na Aritmética comum dos números naturais, podemos sempre realizar as duas operações fundamentais - a adição e multiplicação. Porém, as operações inversas de subtração e divisão nem sempre são possíveis. Os matemáticos levaram muito tempo para compreender que a regra de sinais, (-1) (-1) = 1, juntamente com todas as outras definições, que se referem aos inteiros negativos e frações, não pode ser "provada". Elas são criadas por nós para alcançarmos liberdade nas operações e preservarmos as leis fundamentais da Aritmética.

Da mesma forma que a introdução dos inteiros negativos e do zero abre o caminho para a subtração irrestrita, a introdução dos números fracionários remove o obstáculo aritmético análogo à divisão. O quociente $x = b/a$ de dois inteiros *a* e *b,* definido pela equação $ax = b$ existe como um inteiro somente se *a* for um fator de *b*. Se este não for o caso, introduzimos um novo símbolo, *b/a*, que chamamos de fração. A invenção das frações como novos símbolos numéricos torna a divisão possível sem restrições - exceto quanto à divisão por zero, que é excluída de uma vez por todas.

Expressões como 1/0, 3/0, 0/0 etc. são, para nós, símbolos sem significado. Tais expressões são representadas pelo símbolo ¥ (infinito), desde que não se tente operar com o símbolo , como se ele estivesse sujeito às regras comuns do cálculo com números.

No domínio dos números racionais, as chamadas operações racionais (adição, subtração, multiplicação e divisão) podem ser realizadas sem restrições e jamais se sairá deste domínio. Este domínio fechado de números é denominado de corpo.

Interpretação geométrica dos números racionais

Os pontos racionais são densos como uma reta, isto é, dentro de cada intervalo, por menor que seja, sempre existem pontos racionais. Há infinitos pontos racionais em qualquer intervalo.

Do ponto de vista teórico, pode parecer que todos os pontos sobre a reta são pontos racionais. Se isto fosse verdadeiro, então qualquer segmento seria comensurável como uma unidade, uma das mais surpreendentes descobertas dos antigos matemáticos gregos (a escola pitagórica) foi a de que a situação não era, de forma alguma, assim tão simples: existem segmentos incomensuráveis - os números irracionais. Podemos afirmar que um número irracional representa o comprimento de um segmento incomensurável como unidade.

Frações decimais. Decimais infinita

Como definição geral, afirmamos que um ponto *p* que não está representado por qualquer fração decimal com um número finito *n* de dígitos é representado por uma fração decimal infinita, um "número" é uma decimal finita ou infinita. As decimais infinitas que não representam números racionais são denominadas números irracionais.

Números racionais e dízimas periódicas

Todas as dízimas periódicas são números racionais. Definição geral dos números irracionais por intervalos encaixados: o contínuo numérico, ou sistema de números reais ("real" em contraste com os números "imaginários" ou "complexos") é a totalidade das decimais infinitas. Os números racionais são as dízimas periódicas e os números irracionais são as dízimas não-periódicas.

A verdadeira vantagem que a introdução dos números irracionais trouxe para a descrição matemática de fenômenos físicos é que esta descrição torna-se muito simplificada pela livre utilização do conceito de limite, para o qual o contínuo numérico constitui a base.

Métodos alternativos para definição de números irracionais. Cortes de Dedekind.

Dedekind preferia operar com ideias abstratas, ao invés de utilizar sequências específicas de intervalos encaixados. Um método mais concreto para definir o contínuo numérico é atribuído a George Cantor:

1) Números reais podem ser considerados com frações decimais infinitas.

2) Decimais infinitos são limites de frações decimais finitas.

Comentários sobre geometria analítica - o princípio básico

Não apenas o comprimento, mas todos os objetos geométricos e todas as operações geométricas devem ser incluídas no âmbito dos números. A ideia fundamental da Geometria Analítica é a introdução de coordenadas, isto é, de números vinculados ou coordenados com um objeto geométrico que caracteriza completamente este objeto. São as chamadas coordenadas retangulares ou cartesianas, que servem para caracterizar a posição de um ponto arbitrário p num plano.

A análise matemática do infinito - conceitos fundamentais

O ponto de partida é o conceito geral de conjunto. Para comparar a grandeza de dois conjuntos diferentes, a noção básica é a da equivalência, uma das primeiras descobertas de Cantor em sua análise do infinito foi a de que o conjunto dos números racionais é equivalente ao conjunto dos inteiros.
Os números racionais são enumeráveis, mas Cantor fez a significativa descoberta de que o conjunto de todos os números reais não é enumerável.

A origem dos números complexos

Só em meados do século XIX é que os matemáticos compreenderam que a base lógica e filosófica essencial para operar em um domínio de números ampliados é formalista. Nesse sentido, extensões devem ser criadas por definições que são livres, porém inúteis, se não forem elaboradas de tal forma que as regras e propriedades que prevalecem no domínio original sejam preservadas no domínio maior.

O processo que primeiro requer a utilização de números complexos é o de resolver equações quadráticas. Para que equações do tipo $x^2 = -1$ tenha solução, nosso conceito de número foi ampliado e introduziu-se um novo símbolo, i, definido por $i^2 = -I$.

Naturalmente, este objeto i, a unidade imaginária, nada tem a ver com o conceito de um número que serve para contar. Trata-se de um símbolo sujeito à regra fundamental: $i^2 = -L$

Definição: um símbolo da forma a + bi, onde a e b são dois números reais quaisquer, deve ser chamado de número complexo com parte real a e parte imaginária b.

A interpretação geométrica dos números complexos

Esta interpretação consiste em representar o número complexo z = x + yi por um ponto no plano, com coordenadas retangulares, em que a parte real de z é a sua abscissa, x, e a parte imaginária, sua ordenada, y.

Números transcendentes

Certos números específicos como n e e são transcendentes. De maneira geral, é qualquer número a^b, onde a é um número algébrico ^ O ou I e b é qualquer número algébrico irracional.

Suplemento do capítulo 2 -A Álgebra dos conjuntos

Em anos recentes, ficou claro que a álgebra dos conjuntos lança luz sobre muitos ramos da Matemática, tais como a Teoria da Medida e a Teoria das Probabilidades; é também útil na redução sistemática de conceitos matemáticos em suas bases lógicas.

Capítulo 3

Construções geométricas.

A álgebra dos corpos numéricos.

Neste capítulo, os autores demonstram que qualquer problema de construção geométrica é do seguinte tipo: um certo conjunto de segmentos de reta, digamos a, b, c..., é dado e um ou mais segmentos, x, y..., são procurados.

É sempre possível formular problemas desse modo, mesmo quando, à primeira vista, apresentem um aspecto bastante diferente. Os segmentos procurados podem aparecer como lados de um triângulo a ser construído, como raios de círculos ou como as coordenadas retangulares de certos pontos. Para simplificar, suponhamos que apenas um segmento x seja procurado. Nesse caso, a construção geométrica equivale à resolução do problema algébrico: primeiro, devemos encontrar uma relação (equação) entre a quantidade de x procurada e as quantidades a, b, c... dadas. Em seguida, devemos encontrar a quantidade desconhecida x resolvendo esta equação e, finalmente, devemos determinar se esta solução pode ser obtida por processos algébricos que correspondam a construções com régua e compasso.

O que fornece os fundamentos de toda a teoria é o princípio da Geometria Analítica. A caracterização quantitativa dos objetos geométricos por números reais é baseada na introdução da continuidade dos números reais.

Capítulo 4

Geometria projetiva. A axiomática.

Geometrias não euclidianas.

A Geometria trata de propriedades das figuras no plano ou no espaço. Estas propriedades são tão numerosas e tão variadas que é necessário algum princípio de classificação para ordenar esta riqueza de conhecimentos. Seria possível, por exemplo, introduzir uma classificação com base no método utilizado para deduzir os teoremas. A partir deste ponto de vista, faz-se, usualmente, uma distinção entre os procedimentos "sintético" e "analítico". O primeiro é o método axiomático clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos, independentes da álgebra e do conceito de contínuo numérico, e no qual os teoremas são deduzidos por raciocínio lógico a partir de um corpo inicial de proposições, denominadas axiomas ou postulados. O segundo procedimento é baseado na introdução de coordenadas numéricas e utiliza as técnicas da álgebra. Este método provocou uma profunda alteração na Matemática, resultando em uma unificação da Geometria, da Análise e da Álgebra num único sistema orgânico.

Este capítulo trata das propriedades que permanecem inalteradas ou invariantes, sob uma classe especial de transformações que se situa entre a classe muito restrita dos movimentos rígidos e a classe mais geral das deformações arbitrárias. Esta é a classe das "transformações projetivas". A Geometria Projetiva não está confinada ao estudo de figuras lineares, mas inclui também todo o campo das seções cônicas e suas generalizações em dimensões mais elevadas.

O método axiomático

O método axiomático remonta, pelo menos, à época de Euclides. Na Matemática Moderna, após um afastamento da tradição euclidiana durante os séculos XVII e XVI11, houve uma crescente penetração do método axiomático em todos os campos, um dos resultados mais recentes, foi a criação de uma nova disciplina, a Lógica Matemática. O método axiomático traz poucos benefícios, a não ser que os postulados sejam simples e pouco numerosos. Além disso, os postulados devem ser consistentes, no sentido de que nenhum par de teoremas que forem deles dedutíveis pode ser mutuamente contraditório. Devem ser também completos, de modo que todo teorema do sistema seja dedutível a partir deles.

Por razão de economia, também é conveniente que os postulados sejam independentes, ou seja, não devem ser consequência lógica dos outros. O problema da consistência e da completeza de um conjunto de axiomas tem sido tema de muita controvérsia.

Geometria não-euclidiana hiperbólica

Há um axioma da Geometria Euclidiana cuja "verdade", isto é, cuja correspondência com dados empíricos sobre fios esticados ou raios luminosos, não é de forma alguma óbvia. Trata-se do famoso postulado da paralela única. Ela afirma que é possível traçar uma - e somente uma - reta paralela que passa por qualquer ponto fora da reta dada. A característica notável deste axioma é que ele faz uma asserção sobre toda a extensão da reta, dando a entender que ela se estendesse indefinidamente em ambas as direções; isto porque afirmar que duas retas são paralelas consiste em dizer que elas nunca se cortam, independentemente da distância em que possam ser prolongadas.

Mas é evidente que existem muitas retas que passam por ponto externos e que não cortam a reta dada dentro de qualquer distância finita fixa, por maior que esta seja.

O comprimento máximo possível de uma régua real, um fio, ou até mesmo um raio luminoso visível ao telescópio é certamente finito, uma vez que, dentro de qualquer círculo finito, existem infinitas retas passando por um ponto dado e não cortando determinada reta dentro do círculo, podemos concluir que este axioma nunca pôde ser verificado por experimentos. O fato de que o axioma das paralelas não é verifícável experimentalmente, faz surgir o problema de ele ser ou não independente dos outros axiomas. Ser independente significa, simplesmente, que é possível construir um sistema consistente de proposições geométricas, tratando de pontos, retas etc. Chega-se a essa definição por dedução a partir de um conjunto de axiomas em que o postulado das paralelas é substituído por um postulado contrário. Este sistema é chamado de Geometria não-euclidiana. Exigiu-se a coragem intelectual de Qauss, Bolyai e Lobachevsky pára se compreender que esta geometria, baseada em um sistema não-euclidiano de axiomas, pode ser perfeitamente consistente.

Apêndice: Geometria em mais de três dimensões

O espaço real, que é o meio de nossa experiência física, tem três dimensões, o plano tem duas e a reta, uma. Nossa intuição espacial, em seu sentido comum, é limitada a três dimensões. No entanto, em muitas ocasiões, é bastante conveniente falar de espaços com quatro ou mais dimensões. Pergunta-se: "Qual o significado de um espaço n-dimensional quando n é maior do que três e qual a sua finalidade?". Podemos responder esta pergunta tanto do ponto de vista analítico quanto do puramente geométrico.

A terminologia do espaço n-dimensional pode ser considerada como uma linguagem meramente geométrica, sugestiva para ideias matemáticas que não estão mais ao alcance da intuição geométrica comum.

Capítulo 5 – Topologia

Em meados do século XIX, iniciou-se um desenvolvimento da Geometria que logo iria se tornar uma das grandes forças da Matemática moderna. A nova matéria, chamada de Analysis Situs, ou Topologia, tem como objeto o estudo das propriedades de figuras geométricas que persistem quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas que todas suas propriedades métricas e projetivas são perdidas.

Inicialmente, a inovação dos métodos desse novo campo não permitia que os matemáticos dispusessem de tempo para apresentar seus resultados na forma da postulação tradicional da Geometria Elementar. Em vez disso, os pioneiros, como Poincaré, foram preparados para depender amplamente da intuição geométrica.

Mesmo nos dias de hoje, um estudante de Topologia verificará que, se insistir muito numa forma rigorosa de apresentação, isso pode fazer com que perca facilmente o conteúdo geométrico essencial dentro de uma massa de detalhes formais. Ainda assim, existe um grande mérito por parte dos trabalhos recentes por terem fornecido à Topologia uma estrutura matemática rigorosa, onde a intuição permanece como a fonte mais importante, mas não como a validação final da verdade. Embora a Topologia seja uma criação dos últimos 100 anos, houve algumas descobertas isoladas anteriores que mais tarde encontraram seu lugar no moderno desenvolvimento sistemático. De longe, a mais importante delas é uma fórmula que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro simples. Essa fórmula já havia sido observada por Descartes em 1640, e redescoberta e utilizada por Euler em 1752.

O caráter típico desta relação como um teorema topológico ficou claro muito mais tarde, após Poicaré ter reconhecido a "fórmula de Euler" e suas generalizações como um dos teoremas centrais da Topologia. (V- E + F=2).

Capítulo 6 - Funções e limites

A parte principal da Matemática moderna gira em torno dos conceitos de função e de limite. O conceito de função é da maior importância, não apenas na Matemática pura, mas também em aplicações práticas. Leis físicas nada mais são do que proposições relativas à maneira como certas quantidades dependem de outras quando se permite que algumas destas variem, uma função matemática é uma lei que rege a interdependência de quantidades variáveis, sem implicar qualquer relação de causa e efeito entre elas.

Embora a palavra "função" seja, muitas vezes, utilizada na linguagem comum com esta última conotação, devemos evitar todas as interpretações filosóficas. O caráter de uma função é, com frequência, mostrado de maneira mais clara por um simples gráfico geométrico.

Métodos para introduzir novas funções: função inversa, funções compostas.

Continuidade

1) uma função é contínua se seu gráfico for uma curva ininterrupta.

2) Há funções que não são contínuas em todos os pontos.

A definição de continuidade dada para as funções de uma única variável pode ser transferida diretamente para as funções de inúmeras variáveis. Embora haja uma importante diferença entre funções de uma e de múltiplas variáveis, esta diferença desaparece se for enfatizada a ideia de que uma função define uma transformação. As transformações do plano estudadas na Topologia são dadas não por simples equações algébricas, mas por qualquer sistema de funções que definem uma transformação bijetora e bicontinua.

Limites

A descrição da continuidade de uma função tem por base o conceito de limite. Somente por processos de limite é que as noções fundamentais do Cálculo - derivada e integral - podem ser definidas. Mas a nítida compreensão e a definição precisa do conceito de limite foi, por muito tempo, bloqueada por um obstáculo aparentemente intransponível. Este capítulo discute o limite de uma maneira mais sistemática.

uma vez que sequências são bem mais simples do que funções de uma variável contínua, o estudo de limite começa por sequências. Por exemplo: a sequência cujo n-ésimo termo é na = l In tem o limite O para n crescente; l/n —> O na medida em que n —> «>.

Conforme se vai cada vez mais longe na sequência, os termos tornam-se cada vez menores. Após o 100° termo, todos os termos são menores do que 1/100; após o 1000° termo, todos os termos são menores do que 1/1000; e assim por diante.

Nenhum dos termos é efetivamente igual a zero. Entretanto, se formos suficientemente longe na sequência, podemos ter certeza de que cada um dos seus termos diferirá de zero por um valor tão pequeno quanto quisermos. A única dificuldade desta explicação é que o significado das palavras em itálico não fica inteiramente claro. Quão distante é "suficientemente longe" e quão pequeno é "tão pequeno quanto quisermos"?

Se pudermos vincular um significado preciso a estas frases, então podemos dar um significado preciso à relação de limite.

Dois teoremas fundamentais sobre funções contínuas: o Teorema de Bolzano e o Teorema de Weierstrass, sobre valores extremos.

Capítulo 7 - Máximos e Mínimos

1) um segmento de reta é o caminho mais curto entre seus extremos.

2) um arco de grande círculo é a curva mais curta que une dois pontos sobre uma esfera.

3) Entre todas as curvas planas fechadas de mesmo comprimento, o círculo encerra a maior área.

4) Entre todas as superfícies fechadas de mesma área, a esfera encerra o maior volume.

Propriedades de máximos e mínimos deste tipo eram conhecidas dos gregos, embora os resultados fossem enunciados sem uma tentativa real de prova. Na vida diária, porém, problemas de máximos e mínimos, do melhor e do pior, surgem constantemente. Muitos problemas de importância prática apresentam-se nesta forma.

Por exemplo. "Qual deveria ser a forma de um barco, de modo a apresentar a menor resistência possível na água? Que recipiente cilíndrico, feito de uma determinada quantidade de material, tem um volume máximo?".

A partir do século XVII, a teoria geral dos valores extremos (máximos e mínimos) tornou-se um dos princípios integradores sistemáticos da Ciência. No século que se seguiu, o objetivo destes métodos foi muito ampliado com a inversão do "cálculo das variações". Tornou-se cada vez mais claro que as leis físicas da natureza são expressas de forma mais adequada se utilizarmos termos de um princípio ó mínimo. Isso proporciona um acesso natural a uma solução mais ou menos completa de problemas, uma das mais notáveis realizações da Matemática contemporânea é a teoria dos valores estacionários, que é uma extensão da noção de valores extremos que combina Análise e Topologia. Existe uma ligacão estreita entre a teoria geral dos pontos estacionários e os conceitos de Topologia. Em seu desenvolvimento histórico, o Cálculo Diferencial foi fortemente influenciado por problemas individuais de máximos e mínimos. Um dos aspectos característicos da Matemática superior é o importante papel desempenhado pelas desigualdades. A solução de um problema de máximo sempre leva, em princípio, a uma desigualdade que expressa o seguinte fato: quantidade variável considerada é menor ou igual ao valor máximo fornecido pela solução.

Em muitos casos, tais desigualdades têm um interesse independente. Como exemplo, consideremos a importante desigualdade entre médias aritmética e geométrica.

Um problema de máximo que aparece com muita frequência na Matemática pura e em suas aplicações é: entre todos os retângulos com um perímetro dado, encontrar o de maior área. A solução, como se pode esperar, é o quadrado.

Capítulo 8 - O Cálculo

O primeiro conceito básico do Cálculo é o de Integral. A palavra "integral" foi feita para indicar o todo ou a área integral A é composta das infinitesimais f(x).dx.

De qualquer forma, passaram-se quase 100 anos, depois de Newton e Leibniz, para que ficasse claramente reconhecido que o conceito de limite - e nada mais - é a verdadeira base para a definição da Integral.

Permanecendo, firmemente, sobre esta base, podemos evitar todo o obscurecimento, todas as dificuldades e todos os absurdos que tanto perturbaram o início do desenvolvimento do Cálculo.

Outro conceito básico do Cálculo, a derivada, foi formulado apenas no século XVII por Fermat e outros matemáticos.

Foi a descoberta da inter-relação orgânica, por Newton e Leibniz, entre estes dois conceitos, aparentemente bastante diversos, que inaugurou um desenvolvimento sem paralelo na ciência matemática. Fermat estava interessado em determinar os máximos e mínimos de uma função y = f (x). No gráfico de uma função, o máximo corresponde ao cume mais alto de todos os outros pontos vizinhos, enquanto que o mínimo corresponde ao fundo do vale mais baixo. Para caracterizar os pontos de máximo e mínimo, é natural utilizar a noção de tangente de uma curva.

A discussão precedente da derivada foi feita em conexão com o conceito geométrico do gráfico de uma função. Mas a importância do conceito de derivada não está de forma alguma limitada ao problema de encontrar a inclinação da tangente de uma curva. Nas Ciências Naturais é, inclusive, mais importante o problema de calcular a taxa de variação de alguma quantidade f (t) que varia com o tempo i.

Foi sob este ângulo que Newton queria, em particular, analisar o fenômeno da velocidade, onde o tempo e a posição de uma partícula móvel são considerados como os elementos variáveis, ou, em suas próprias palavras, como as "quantidades fluentes".

A primeira meta de Newton consistia em determinar a velocidade de um movimento não-uniforme. A velocidade é a derivada da distância em relação ao tempo, ou taxa de variação instantânea da distância em relação ao tempo.

A taxa de variação da velocidade em si é chamada de aceleração. Ela é, simplesmente, a derivada da derivada. Geralmente, é representada por f" (t) e chamada de segunda derivada de f (t).

A segunda derivada também é importante na Análise e na Geometria, porque f "(x), expressando a taxa de variação da inclinação f (x) da curva y = f (x), dá uma indicação de como a curva é dobrada.

Podemos encontrar os máximos e os mínimos de uma dada função / (x) calculando primeiro f (x) encontrando, em seguida, os valores para os quais esta derivada desaparece. Depois se investiga quais destes valores fornecem máximos e quais fornecem mínimos.

O grande feito de Leibniz e de Newton foi o de terem, pela primeira vez, identificado e explorado claramente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Apêndice - Observações suplementares, problemas e exercícios

Neste apêndice, são apresentados muitos problemas destinados ao leitor, até certo ponto, avançado. Tem o objetivo de estimular a capacidade criativa e não tanto o de desenvolver técnicas rotineiras.

4. DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. O sonho de Descartes: o mundo de acordo com a matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

A paisagem da cidade de Ulm, no Sul da Alemanha, devia ser belíssima em 1619. Um bosque imenso de abetos[3], faias[4] e carvalhos ladeava as fortificações da cidade e se estendia até os Alpes Bávaros, escondendo em sua mata lobos e corujas. A torre da Catedral dominava o conglomerado de casas de tetos agudos dispostas à margem do Danúbio.

Numa dessas casas, em uma manhã de novembro, René Descartes se aquecia ao pé de uma lareira. Aquecia-se e meditava, na vaga incerteza daquela manhã de inverno, oscilando entre o pensamento consciente e visões que lhe pareciam pesadelos. Desde a adolescência havia estudado com devoção o Evangelho, as ciências, os poetas clássicos e a Filosofia. Havia decidido abandonar sua cidade natal para "conhecer o livro do mundo".

Durante anos vinha-se atormentando com turbilhões de dúvidas e reflexões à procura de algo que fosse a um tempo fundamento e esperança de sua vida. Buscava o elemento que unificasse e justificasse suas peregrinações pelos diversos campos do conhecimento humano. Naquele dia ele fitava aturdido, ora o céu cinza através da janela, ora as faíscas na lareira, enquanto os fantasmas de sua mente o torturavam com perguntas inexoráveis. "Quem sou eu?", "O que posso saber?", "O que posso esperar?". No silêncio daquela sala o desconforto chegou a ser tamanho que Descartes duvidou até da própria existência. Quem podia assegurar que ele era real, que ele e a lareira não eram fruto da imaginação de algum outro ser? Quase a ponto de desmaiar Descartes rezou e implorou por um momento de clareza. Não sabemos se suas preces foram ouvidas, mas sabemos que, aos poucos, entre os clarões da lareira, Descartes foi divisando uma límpida certeza. Tudo podia ser um sonho, a sala, a lareira, menos sua angustiante cogitação. As suas dúvidas eram a prova de sua existência.

---

[3] Árvore da família das pináceas; pinheiro-alvar; madeira de abeto.
[4] Árvore fagácea ou castaneácea.

Esta é a história que o próprio Descartes relata para explicar como chegou a formular a frase lapidar, que se tornaria o ponto de partida de seu método filosófico e bandeira do cartesianismo: “Cogito ergo sum”. «Penso, logo existo.»

> *Será que não se segue que também eu não existo? Não: se eu me convenci de algo, então certamente existo. Mas há um enganador sumamente poderoso e traiçoeiro que deliberada e constantemente me engana. Nesse caso, também é indubitável que eu existo, para que ele me possa enganar; engane-me ele tanto quanto puder, nunca poderá fazer que eu nada seja desde que pense que sou algo. Assim, depois de considerar tudo exaustivamente, tenho finalmente de concluir que esta proposição,* eu sou, eu existo, *é necessariamente verdadeira sempre que é avançada por mim ou concebida no meu espírito*

Cogitar descreve o árduo processo de remoer, arrumar os dados confusamente espalhados em nossas mentes para, finalmente, se logramos sintetizar o resultado de nossas cogitações, chegar ao pensamento. Responsável pelo processo de cogitar é a ratio, ou razão, e Descartes a colocou como ferramenta essencial para atingir o conhecimento. Através do uso certo da razão, Descartes intuiu a possibilidade de encontrar um método e uma linguagem que unificassem todas as áreas do conhecimento humano.

Dezoito anos após aquela decisiva manhã de novembro, Descartes reunia os frutos de suas reflexões no célebre “Discurso sobre o Método de bem conduzir a razão na busca da verdade nas ciências”. As regras básicas do método cartesiano têm uma formulação simples:

- aceitar somente ideias que sejam claras e livres de dúvida;

- dividir as questões complexas em questões menores;

- argumentar, partindo do simples para o complexo;

- verificar o resultado.

A qualquer pessoa que deseja conhecer o mundo, Descartes aconselha fazer “tábua rasa” de tudo o que acredita saber e começar do nada, tendo o mundo como fonte de informações a seu dispor. É evidente que para argumentar partindo do simples para o complexo e para passar de uma ideia clara a outra igualmente clara precisamos de um mecanismo lógico que nos permita deduzir e induzir sem erros. Descartes adotou como “princípios infalíveis” os da lógica aristotélica, e entre eles, o do terceiro excluído. Um ponto crucial no sistema cartesiano é a dúvida (hiperbólica) sobre a veracidade das percepções humanas. Quem nos assegura que o mundo existe, que não é fruto de um engano causado por algum espírito do mal? Descartes resolve esta dúvida fundamentando seu método na existência de Deus. Deus existe – neste ponto Descartes utiliza o argumento ontológico – Deus é bom e não brinca conosco. Portanto o mundo existe, como criação de Deus, e fazendo uso da razão podemos conhecê-lo.

Apoiado em seu método, Descartes estudou a Geometria, os princípios da Física, as leis da circulação do sangue e a natureza das paixões da alma.

A contribuição de Descartes à Matemática é enorme. É comum atribuir a Descartes a geometria analítica como a conhecemos hoje. Esta atribuição é discutível. Seria mais exato dizer que a geometria analítica surgiu na época de Descartes e ele foi um dos seus criadores. Uma boa parte dos escritos de geometria de Descartes foi dedicada à algebrização das construções com régua e compasso. O mérito de Descartes foi de selar definitivamente o rompimento com a postura “geometrizante” dos gregos. Se os gregos se empenharam durante séculos em representar os números como grandezas geométricas, Descartes se dedicou a traduzir as construções geométricas em equações algébricas.

Sem querermos nos aprofundar nas contribuições de Descartes em Física, Anatomia e Psicologia, é preciso assinalar que em todas as suas pesquisas ele se manteve fiel à sua visão unificadora, utilizando seu método, que até hoje chamamos de analítico, e formulando seus conceitos em linguagem lógico-matemática.

A proposta do livro “O sonho de Descartes” é a de ilustrar como, ao longo de quatro séculos, a matematização das ciências vem-se concretizando de maneira triunfante. O livro é uma coletânea de palestras proferidas em universidades, entrevistas e artigos já publicados em revistas. Os autores convidam o leitor a folhear o texto, lendo ora uma seção, ora outra, seguindo as necessidades da sua imaginação. Esta é, sem dúvida, uma leitura possível. Lido desta maneira, o livro se torna um imenso jornal rico em informações.

O leitor à moda antiga que, fascinado pelo título, lê o livro à procura da análise consciente da realização do sonho de Descartes como sistema de pensamento, acaba sendo castigado.

Na seção sobre "O mundo estocatizado" os autores discutem a postura probabilística que hoje em dia substitui, ou pelo menos complementa, a postura determinista. A problemática dos fundamentos da mecânica quântica é abordada brevemente com o relato de duas famosas anedotas. O leitor sente falta de alguma referência a Descartes. Ele duvidava da veracidade de suas percepções, mas sua visão era determinista, para ele o terceiro excluído era um princípio infalível.

Duzentas páginas do livro são dedicadas ao impacto do computador nas diversas áreas do conhecimento e do comportamento humano. Na seção sobre a computação gráfica, o leitor se convence da revolução ocorrida não só na matemática como também nas artes figurativas e nas técnicas de propaganda. O texto se aprofunda em problemas filosóficos de alta envergadura sobre a relação entre pensamento e linguagem.

São problemas que Descartes em 1619 não podia imaginar. Até que ponto todas as suas cogitações estavam condicionadas pela sua linguagem natural? Podia ele pensar algo além daquilo que ele podia expressar?

Aprendemos no livro que existem ao menos duas teses filosóficas sobre o problema. Segundo a tese de Whorf, cada linguagem fixa e delimita um certo sistema de pensamento. Strauss expõe esta tese e dá como exemplo a riqueza e a clareza da língua grega. O Francês, ele diz, também é uma língua clara. Para estremecimento do leitor amante da língua de Euler, Leibniz, Kant, Hegel, Hilbert e Wittgenstein, Strauss afirma que o alemão é pouco claro e, pelo fato de ser pouco claro, permitiu tanta metafísica. A tese de Chomsky estabelece que uma estrutura linguística básica (e universal) está pré-programada no funcionamento de qualquer cérebro humano. Não há dúvida que Descartes seria Chomskiano. Por outro lado, é claro que o problema da linguagem o levaria, caso ressuscitasse hoje, a reformular todo seu método.

Na seção “A matemática e o tempo” os autores abordam só de leve a postura formalista. Como teria reagido Descartes se, como Wittgenstein, tivesse assistido a famosa palestra que Brouwer proferiu em 1928 em Viena, na qual expôs a tese intuicionista?

Em uma entrevista com uma professora de História da Ciência da Universidade de Brown é discutida a “crise de valores” causada pela postura relativista nas ciências. A entrevista contém menções à geometria Riemanniana, à relatividade na Física e à moderna Psicanálise.

Finalmente no posfácio é apresentada a dialética entre a postura “científica” cartesiana e a postura “humanística” de Vico. Os autores terminam com palavras de esperança. A antiga esperança na síntese entre ciências e Humanistas.

Lendo o livro com atenção acaba-se concluindo que o sonho de Descartes se revelou um sonho. Mas esta não é uma constatação trágica. Ao contrário, foi um sonho maravilhoso que nos permitiu no mínimo quatro séculos de progresso entusiasta. Houve traumas e terremotos que quase nos levaram a acordar. Mas, em verdade, continuamos sonhando. As regras das nossas vidas continuam sendo deterministas e os nossos computadores são cartesianos. Entre os matemáticos, alguns poucos são formalistas. O resto continua provando teoremas por contradição e acreditando com firmeza nos números reais. Quanto ao infinito, ele é algo real, presente todos os dias.

O legado de Descartes libertou-nos do pesadelo do dogmatismo medieval e concedeu-nos um sonho que além de ser maravilhoso, funcionou e funciona até hoje.

Considerações sobre Descartes

René Descartes nasceu a 31 de Março de 1596, numa aldeia que, antes dele, se chamava Touraine e, depois dele, passou a chamar-se La Hayer-Descartes, no departamento francês de Indre-et-Loire.

Descartes viveu numa Europa profundamente dividida (política, religiosa e socialmente), possuída por uma curiosidade invulgar que se traduzia desde a realização das grandes viagens ao conhecimento das antigas civilizações, percorrida por uma total diversidade de opiniões e doutrinas, onde nenhuma autoridade permanecia inquestionável: a da ciência, da filosofia ou da fé, e onde a ruptura entre estas parecia inevitável.

A situação essencial do homem dessa época era a dúvida, o cepticismo, o resultado mais grave e ameaçador que as circunstâncias da época haviam produzido e que podemos ver professado por autores brilhantes que, lucidamente, parecem renunciar a qualquer certeza, qualquer esperança, qualquer solidez no pensamento e na vida.

René Descartes foi um filósofo racionalista em que, o racionalismo é a doutrina epistemológica que defende, que a razão é por direito próprio uma fonte de conhecimento, estando esta ideia presente em Descartes sob várias modalidades.

Em primeiro lugar, Descartes pensava que podemos intuir a verdade de certas proposições por meios estritamente racionais e sem o recurso à experiência. É nesta intuição puramente racional que se apoia a tese de que as proposições claras e distintas têm de ser verdadeiras. Podemos, por exemplo, com base numa avaliação racional, determinar como verdadeiras as proposições básicas da Geometria e da Matemática.

Das proposições que intuímos como verdadeiras, podemos deduzir outras proposições cuja verdade é também considerada a priori.

Os fundamentos do conhecimento (o cogito e Deus) podem ser conhecidos desta forma, bem como a distinção entre o corpo e a mente.

Descartes é considerado o primeiro filósofo "moderno". A sua contribuição à epistemologia é essencial, assim como às ciências naturais por ter estabelecido um método que ajudou o seu desenvolvimento. Descartes criou, em suas obras *Discurso sobre o método* e *Meditações* – ambas escritas no vernáculo, ao invés do latim tradicional dos trabalhos de filosofia – as bases da ciência contemporânea.

5. DEVLIN, Keith. O gene da matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. Rio de Janeiro: Record, 2004.

Todos nós possuímos o gene matemático – ou seja, uma facilidade inata para matemática. Esta predisposição genética para a matemática seria a mesma predisposição para a linguagem. A habilidade de pensar matematicamente surge do mesmo processo de manipulação de símbolos, crucial para o desenvolvimento da fala.

Apresenta uma consistente tese sobre a capacidade matemática que todos os seres humanos têm.

Hipóteses e teses encontram, na análise do desenvolvimento da espécie, os fatos que justificam nossa capacidade de fazer matemática.

A evolução do cérebro humano se deu ao longo de três milhões e quinhentos mil anos, chegando a ser nove vezes maior do que o cérebro de um mamífero com o mesmo tamanho que nós.

Na análise do desenvolvimento da espécie, os fatos que justificam nossa capacidade de fazer matemática se convertem para a única explicação para este crescimento: é o estímulo causado pelo desenvolvimento da linguagem e o uso de símbolos para representar a realidade, o que se chama de pensar de forma desconectada. Buscando evidenciar esta teoria remonta-se aos hominídeos e sua protolinguagem até chegar ao Homo sapiens e o estabelecimento de uma sintaxe.

Evidentemente, uma pergunta não pode deixar de ser feita: se todos temos o "gene da matemática", por que para a maioria das pessoas a matemática é tão difícil? Devlin conclui que a "maioria das pessoas pode ir muito além do que julgam que podem. A matemática não é diferente de correr uma maratona.

Para a maioria das pessoas tudo que é preciso é um desejo suficiente para fazê-lo. A chave para lidar com a matemática é o querer.

O pensamento matemático está presente no nosso cotidiano. Os matemáticos não têm cérebros diferentes,

O problema não é que as pessoas não entendam a matemática, o problema é que elas nunca chegam até ela! Os que conseguem ultrapassar as primeiras barreiras conseguem ver, até com certa facilidade, as belezas da matemática. Até mesmo para os matemáticos algumas partes são difíceis, mas a matemática que é ensinada na escola básica não apresenta maiores dificuldades.

O "gene da matemática" não é diferente do "gene da linguagem". Não existe nenhum estudo sobre como evoluiu nossa capacidade para o pensamento matemático ("A capacidade numérica sim, mas a capacidade matemática, não"). O autor se apega às teorias da linguística com os trabalhos de Ferdinand de Saussure no início do século 20 e de Noam Chomsky nas décadas de 1950 e 1960, para mostrar que todas as línguas humanas compartilham de uma mesma estrutura subjacente.

O pensamento matemático tem uma mesma estrutura em todos os seres humanos. No cérebro humano estaria "gravada" a árvore fundamental da linguagem, ou seja: nós temos uma capacidade inata para a linguagem e esta capacidade pode ser descrita em termos de uma gramática de estrutura de frase, uma sintaxe.

“Onde os demônios espreitam e os matemáticos trabalham”, discute-se com profundidade as dificuldades que a maioria das pessoas têm com a matemática, e procura mostrar que estas dificuldades podem ser superadas.

Uma pesquisa feita no Brasil, que tem como uma de suas autoras a pesquisadora Terezinha Nunes, publicada com o título: “Na vida dez, na escola zero”, onde os pesquisadores mostram crianças da terceira série do ensino fundamental que trabalham em feiras livres e demonstram grande habilidade para lidar com números na feira e encontram muitas dificuldades na escola.

Mais do que ensinar matemática, é necessário despertar o interesse pela matemática. Não há uma receita para isto. Seja “o que for que cause o interesse, é esse interesse em matemática que constitui a principal diferença entre os que podem lidar com o assunto e aqueles que alegam ser isto impossível”. A bola está com aqueles que procuram fazer da matemática um terreno menos árido.

A habilidade de pensar matematicamente surgiu da mesma capacidade de manipulação de símbolos, que foi tão crucial para a emergência da linguagem primeira. Então por que não resolvemos problemas de matemática tão facilmente quanto falamos? A resposta é que o fazemos, mesmo sem perceber que estamos usando o raciocínio matemático; diferente daqueles felizardos que tratam os números como "velhos amigos". Explorando as conexões entre linguagem e matemática,

As possibilidades teóricas que justificam a formação da linguagem, em sua essência, é muito semelhante ao pensamento matemático.

Há uma associação direta entre nossas capacidades para a linguagem e a nossa capacidade matemática. As línguas se formam, fundamentalmente, por um sistema estrutural, ou o esqueleto que dá suporte ao edifício linguístico, que chamamos sintaxe, juntamente como nossa capacidade de articular sons, de representar simbolicamente, e especialmente, por nossa capacidade de abstrair.

Cada um destes aspectos é explorado desde a formação dos primeiros hominídeos, e são avaliadas as possibilidades que justificam a formação de cada uma destas capacidades.

A associação direta com a matemática é evidente: as capacidades que deram condições para que o ser humano formasse a linguagem também dão forma às habilidades requeridas para a Matemática.

Em Matemática necessitamos especialmente da capacidade de representação simbólica, além do pensamento abstrato. Se reunirmos a isto a capacidade de percepção espacial, de ordenamento, e o senso numérico, estamos com todos os ingredientes para desenvolvermos tudo o quanto sabemos em Matemática.

As pequenas variações, que em si não são excludentes, entre a matemática e a linguagem, tiveram sua formação desde o *homo erectus*, e se fortaleceu no *homo sapiens*. Com os elementos estruturantes, o desenvolvimento de cada uma viria naturalmente, de acordo com a necessidade. Daí porque a linguagem surge e se forma bem antes da matemática: a espécie humana desenvolveu a linguagem quando precisou desta; a matemática veio bem depois, quando as civilizações já eram suficientemente complexas para exigir os conhecimentos para o benefício coletivo que somente a matemática poderia providenciar.

O maior problema para a maioria das pessoas é, como já se sabe, o aprendizado da Matemática formal, aquela que aterroriza tantas pessoas nas escolas e universidades.

Concluindo, 'O gene da matemática', esclarece como a língua se relaciona em dois níveis; a habilidade de pensar matematicamente surge do mesmo processo de manipulação de símbolos, crucial para o desenvolvimento da fala.

6. EGAN, Kieran. A mente educada: os males da educação e a ineficiência educacional das escolas. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

INTRODUÇÃO

A crise educacional da atualidade pode, analogicamente, apresentar aspectos semelhantes ao ocorrido com a crise econômica do século XVI na Europa. Diante do aumento paulatino dos preços da mercadoria, os cidadãos buscavam um culpado para a crise, sendo citados os comerciantes, os produtores de bens primários, fornecedores de matérias-primas etc. Naquele contexto, necessitou-se de uma teoria econômica para revelar o quebra-cabeça central. Da mesma forma, nota-se, nos dias de hoje, um quebra-cabeça social envolvendo a Educação e a ineficiência do sistema escolar. Necessário se faz uma teoria educacional.

A Mente Educada aborda os três principais conceitos educacionais: a necessidade de moldar as crianças e os jovens às regras e convenções da sociedade adulta; a transmissão do conhecimento para garantir que o pensamento dessas crianças e jovens esteja de acordo com o que há de real e verdadeiro a respeito do mundo; e o estímulo ao desenvolvimento do potencial de cada aluno.

O autor se propõe a sondar se essas ideias guardam compatibilidade ou se são incompatíveis entre si, e em que medida podem ser apontadas como causas da crise educacional, compreendendo a formulação dos currículos do ensino como um todo em sua dimensão de sistema.

A pretensão de Kieran Egan é apresentar uma nova teoria que seja adequada e capaz de esboçar uma alternativa para combater essa crise educacional.

Primeira Parte

Três ideias antigas e uma nova

As três ideias antigas apresentadas pelo autor referem-se à concepção da educação como processo de Socialização (1), ao pensamento de Platão sobre Educação e a Verdade sobre a Realidade (2), e, por fim, à concepção de Rousseau e a orientação da natureza.

Por sua vez, sob a denominação de uma ideia nova, o autor pretende apresentar não só uma síntese das três concepções antigas enunciadas, mas propor uma nova perspectiva não excludente, portanto, complexa. Esta concepção está alicerçada no pensamento didático de Vygotsky.

Processo de Socialização – primeira ideia antiga

Considera que a iniciação dos jovens nos conhecimentos, os valores, as técnicas e os compromissos, comuns aos membros adultos da sociedade, são cruciais para qualquer projeto educacional. Nesse sentido, trata-se de um verdadeiro processo de socialização e absorção dos valores que sustentam a estrutura da sociedade e determinam o senso de identidade de seus membros individuais. Quanto à técnica, destacam-se o uso da rima, do ritmo, da métrica, de imagens vívidas e, principalmente, da “codificação” do saber popular em histórias. Estas se destinam a garantir uma coesão entre o grupo social, ligando o ouvinte a esses conteúdos por meio da emoção, do sentimento de pertença social e internalização dos conteúdos comunicados.

A tarefa central da sociabilização é inculcar um conjunto restrito de normas e crenças nas crianças e jovens, visto que esses apresentam facilidade para adaptação e absorção desses valores ou conteúdos. Desta forma, visa a sobrevivência e a conservação do senso de identidade de determinada sociedade numa espécie de homogeneização na formação de seis membros. Durkheim assevera que nessa perspectiva: “a educação perpetua e reforça essa homogeneidade, fixando na criança, desde o início, as semelhanças essenciais exigidas pela vida coletiva” (DURKHEIM, Émile. Educacion and Sociology (tradução e introdução de Sherwood D. Fox. Nova York: Free Press, 1956, p. 70).

Platão e a Verdade sobre a Realidade – segunda ideia antiga

Platão (428-347 a.C.) destaca-se por apresentar uma teoria educacional descritiva de como as pessoas deveriam ser educadas. Na obra “A República” expõe a forma adequada da educação, buscando demonstrar que a educação deveria ser um processo de compreensão do mundo, de percepção das formas de conhecimento, potencializadoras de uma concepção racional da realidade. Neste sentido, o estudo disciplinado das formas abstratas de conhecimento combinado com uma espécie de compromisso espiritual fornecem elementos para se transcender as crenças convencionais, os estereótipos e passar a ver a realidade com clareza.

Assim, Platão procura superar a educação como processo de sociabilização, onde se busca equipar os alunos para desenvolver o conhecimento e técnicas mais adequados a garantir o sucesso como cidadãos e participar do mesmo contexto de valores e normas de seus pares. Ao contrário, o compromisso da educação é com a racionalidade como instrumento de acesso à realidade.

É fato que, atualmente, as escolas de todo o mundo deveriam se preocupar com o cultivo intelectual dos jovens de modo que não seja justificado simplesmente em termos de utilidade social.

Sublinhe-se que a aplicação do pensamento platônico à educação, forçosamente, há que se entender a escola como um lugar à parte da sociedade, isto é, um lugar dedicado ao conhecimento, técnicas e atividades que são de “valor persistente”, transcendendo as exigências da vida social em curso, e valorizando o conhecimento menos pela sua utilidade social do que por seu pretenso benefício à mente do aluno. Neste modelo, por exemplo, o estudo do Latim tem um *status* mais elevado do que a mecânica de automóveis. Neste cenário, os professores tendem a ocupar um papel mais distante, abalizado, e até autoritário, porque eles, adequadamente, corporificam a autoridade que decorre de ser especialista na matéria relevante à estrutura curricular acadêmica.

Rousseau e a orientação da natureza – terceira ideia antiga

No entendimento de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) a prática educacional em seu tempo era desastrosa. Reconhece o valor da obra de Platão e sua teoria sobre a educação. Entretanto, assinala que os pedagogos obtusos desvirtuaram o projeto de Platão criando como resultado a infelicidade, a violência e a frustração. Forçosamente, tem-se que admitir que a obra *Emílio ou Da Educação* obrigou seus contemporâneos, e tantos outros pedagogos, até aos nossos dias, a observarem a infância. Até Rousseau, a temática da infância não era pautada adequadamente, mesmo por aqueles que tinham instituído reformas educacionais. Estava sempre em causa criar o homem a partir da criança, prepará-la para o estado adulto e nada mais ver nela do que o futuro homem. Situa-se, neste mesmo ponto, a revolução pedagógica que confere uma originalidade indiscutível à posição de Rousseau: ter afirmado que a infância era um estado indispensável, um estado com valor próprio, com finalidade própria e predestinado sem dúvida, a longo prazo, a ser seguido pelo estado adulto, mas com uma utilidade diversa de o preparar ou preparando-o apenas na medida em que o antecede.

Como resultado prático da postura de Rousseau tem-se que na sala de aula ou fora dela o aprendizado da descoberta deve ser valorizado. Neste sentido, os manuais e a exploração de outros espaços, tais como museus, são recomendados para a fascinante descoberta dos alunos. A discussão deve ser estimulada, bem como se deve proporcionar a inserção e trabalho em projetos de dimensão pessoal ou coletivamente. De igual forma, deve-se dispensar atenção cuidadosa aos dados empíricos do aprendizado das crianças, seu desenvolvimento e motivação, e o ensino e os currículos são ajustados para estarem em conformidade com essas descobertas de pesquisa estimuladas. Os professores, aqui, não são tanto autoridades quanto facilitadores, fornecedores dos melhores recursos, formatadores do ambiente em que os alunos irão aprender.

INCOMPATIBILIDADES envolvendo as três concepções ou ideias

A dissonância entre o ensino para a socialização e o ensino para a o saber torna-se clara. Neste sentido, a partir das três perspectivas ou ideias expostas infere-se fatalmente em discrepantes incompatibilidades, com consequências paradigmáticas que se manifestam nas finalidades da escola ou dos currículos ao se adotar uma ou outra postura. Isso deixa em frangalhos toda a teorização sobre o ensino baseado em competências que constitui o paradigma de ensino na atualidade.

UMA ideia NOVA

A nova concepção de educação, a ser elaborada, deve aproximar-se e beber de duas fontes, que são apresentadas como concepções alternativas de desenvolvimento: recapitulação e a teoria de Vygostsky. Eis a seguir algumas características de ambas as concepções grifadas.

Recapitulação – trata-se de uma alternativa que foi muito popular no final do século XIX. Neste ponto de vista, o espírito humano foi programado para se desenvolver por uma sequência de etapas, que foram uma recapitulação das fases de que "a raça" passara. Herbert Spencer expressa a base de uma teoria da recapitulação cultural da educação da seguinte forma: *se há uma ordem em que a raça humana tem dominado suas diferentes tipos de conhecimento, não irá surgir em cada criança uma aptidão para adquirir esse tipo de conhecimento na mesma ordem. A educação deve ser a repetição da civilização em pouco*.

Para tornar-se científica, a teoria da recapitulação deve mostrar alguma conexão precisa de causalidade entre o desenvolvimento cultural do passado e do desenvolvimento educacional atual. O desafio era mostrar exatamente o que foi recapitulado e por que deve necessariamente surgir em cada criança a aptidão que Spencer afirmou.

Ocorre que, historicamente, verificou-se que os Currículos Recapitulação entraram em conflito com as urgentes necessidades sociais das escolas da nova massa da América e Europa, para preparar os imigrantes e as classes trabalhadoras para novas formas de trabalho em economias em rápida mutação. Dewey revela pontos frágeis da teoria ao argumentar que a aceitação de recapitulação conduz a uma influência sobre o currículo de forma que ele: "tende a apresentar imitações mais ou menos fúteis do passado". Simples mimese.

Outra alternativa apareceu no trabalho de Lev Vygotsky. Ele nasceu no mesmo ano que Piaget (1896), e foi crítico das teorias de desenvolvimento de Piaget porque, na sua opinião, elas não conseguiram reconhecer o grau de desenvolvimento da mente, incorporada socialmente no ambiente em que a criança cresceu. Vygotsky afirmava que a mente, ao contrário do corpo, assume de maneira significativa na forma do que ele "come".

Vygotsky definiu o desenvolvimento em termos de criação ou transformação das formas de mediação, isto é, defendeu que o desenvolvimento intelectual não poderia ser adequadamente compreendido em termos da acumulação de conhecimento, nem em termos da sequência de estágios psicológicos como Piaget, mas requer uma compreensão do papel desempenhado pelas ferramentas cognitivas, as formas de mediação, disponíveis na cultura em que uma pessoa nasceu. São essas ferramentas que determinam o tipo de entendimento que se desenvolve. Ele se concentrou principalmente no desenvolvimento da linguagem oral como um sistema de signos distintivos, concluindo que o sistema de signos reestrutura todo o processo psicológico.

A contribuição de Vygotsky, assinala Egan, é relativa ao reconhecimento de que a mente é, em suas operações desde o início, não apenas um órgão epistemológico e psicológico, mas também um órgão social, e ela só atinge a realização de qualquer das suas capacidades, além da percepção de base, em contextos sociais.

O papel da educação é, então, o de permitir o desenvolvimento máximo da mente, entendida como um órgão cultural, onde as capacidades cerebrais e a cultura interagem. Recorrendo a Vygotsky, propõe que a educação deve maximizar o nosso conjunto de ferramentas cognitivas, cujo principal trabalho é produzir compreensão.

Os principais sistemas operativos da mente são descritos como vários tipos de compreensão:

1- **Somática** - os nossos sentidos dominantes (visão, audição, tacto, gosto e olfato) condicionam e enriquecem a nossa percepção da realidade. A compreensão somática é maximizada pela estimulação e desenvolvimento dos sentidos, do humor e das emoções;

2- **Mítica** - relacionada com a linguagem, deve ser desenvolvida através do uso da "história" enquanto técnica que permite a interiorização contextualizada de fatos, levando ao desenvolvimento da capacidade de reconhecer e usar metáforas, rimas, narrativas, histórias, imagens, ricas e variadas;

3- **Romântica** - ligada à realidade, ao despertar do contexto das experiências, das emoções e do sentimento em sua dimensão humana e literária. Trata-se de um conhecimento humanizado e transcendente sem descurar da realidade concreta;

4- **Filosófica** - associada à adoção do pensamento geral, abstrato e teórico. As ferramentas associadas a este tipo de compreensão são: a visão própria enquanto agentes dos processos históricos e sociais, a abertura para as anomalias, a capacidade de formar metanarrativas e a necessidade de alguma base de verdade, ânsia de certeza e de autoridade;

5- **Irônica** - na sua forma mais simples, consiste em reconhecer a diferença entre o que se diz e o que se pretende dizer. A compreensão dos limites das palavras liga-se ao reconhecimento de que a nossa descrição de ideias, verdades ou fatos é inadequada perante a verdadeira natureza desses fenômenos. A flexibilidade mental é uma consequência da aquisição deste conjunto de ferramentas. A ironia é, portanto, uma postura interlocutória e metodológica, e não postura arrogante.

Uma vez descritos os princípios que norteiam a compreensão em dimensões específicas, há que se grifar a importância de algumas ferramentas cognitivas, localizadas no contexto da compreensão mítica, que constituem importantíssimo instrumento do conhecimento, tais como as histórias, a metáfora, os opostos binários, a rima, ritmos e padrões etc.

6- As histórias

Constitui uma das ferramentas cognitivas mais importantes colocadas ao dispor do sistema educacional para o desenvolvimento do conhecimento desde uma configuração imaginativa. As histórias conseguem moldar tanto o conteúdo do mundo real, quanto os elementos materiais ficcionais.

7- Metáfora

Permite ver uma coisa em termos de outra. Esta capacidade é central no desenvolvimento da capacidade intelectual, criatividade e imaginação.

8- Opostos binários

São ferramentas básicas que auxiliam a organizar e categorizar o conhecimento. Trata-se dos opostos em conflito presentes nas histórias, na construção do conhecimento e na própria realidade. Os opostos possuem forte carga de compreensão romântica, isto é, emocional, tais como bem/mal, segurança/medo, competição/cooperação.

d) **Imagens**

A sociedade ocidental é saturada por imagens visuais. Neste sentido, é tarefa importante que os estudantes encontrem espaço para aprenderem a gerar as suas próprias imagens mentais. A palavra é geradora de imagens. A imagem transporta para uma força imaginária e criativa memorável, muito maior do que o próprio conceito encerra e revela. Necessário e urgente se faz valorizar a utilização das imagens e o poder criador dos estudantes dentro do sistema de ensino e aprendizagem.

SEGUNDA PARTE

ALGUMAS IMPLICAÇÕES PARA O CURRÍCULO

Em termos históricos, o autor assinala que as teorias sobre o currículo e sobre a educação, em geral, podem ser divididas em duas categorias que identificam tempos históricos e concepções acerca do papel dos destinatários da educação: (1) antes de meados do século XIX e (2) após meados do século XIX.

Na primeira concepção as teorias ocupavam-se amplamente das virtudes morais, das excelências humanas e do conhecimento que deveria ser introjetado num pequeno grupo de homens que deveria formar a elite social e política. Neste sentido, não se dava valor às massas atingidas pelo analfabetismo e a estas relegava-se tão somente ficar com suas culturas oral-mítico-populares, pois entendia-se que a cultura acadêmica era irrelevante para estas.

Após meados do século XIX muda-se o eixo, visto que a preocupação é organizada em torno do saber técnico, e conhecimentos instrumentais elementares faziam-se necessários. Neste passo, a preparação era destinada às massas, isto é, a formação de homens e mulheres para o trabalho produtivo, a boa cidadania e o lazer satisfatório. Denota-se que as massas foram mais ou menos alfabetizadas.

A problemática aqui colocada é apenas um dos muitos aspectos, ou viés, enfrentados pelo currículo escolar. A preparação de um determinado currículo entrecruza uma vastidão de questões sociais, ideológicas, técnicas, cautelares e morais. Didaticamente, cada uma das três ideias antigas educacionais (ideia sociabilizante, ideia de Platão e ideia de Rousseau) implica diferentes prescrições para o currículo, cada qual arrogando-se apresentar as soluções para os problemas colocados.

Entretanto, o autor sugere que a melhor configuração do currículo é aquela que se esteira na contribuição dada por Vygostsky e, partindo da compreensão acerca da complexidade, assinala que a questão deve ser abordada desde os instrumentais ou ferramentas cognitivas.

De posse dos ferramentais cognitivos da compreensão mítica, da compreensão romântica, da compreensão filosófica, Egan propõe que os temas curriculares da Linguagem, Ciência e Matemática sejam concebidos sob a égide e pressupostos das ferramentas e instrumentais cognitivos propostos, superando, então, a mera configuração epistemológicas das ideias antigas, incompatíveis e excludentes entre si.

Aqui se compreende a máxima assumida: o currículo, o ensino e a educação deve maximizar o conjunto de ferramentas cognitivas, cujo principal trabalho e finalidade é produzir compreensão. A compreensão não é uma atividade estanque, hermética, mas circular, complexa.

Em termos de conclusão, quanto à estrutura curricular clássica, e uma mais radical, tem-se que, embora o currículo clássico se concentre em torno de uma pequena porção de qualquer texto, perdendo-se em minúcias de pronúncias, etimologias, modos e particípios verbais, ainda assim, exerceu certo atrativo e envolvimento nos alunos. Deste modo, a matéria era valorizada pela sua natureza de dificuldade, por exemplo, o Latim e o Grego, que desafiavam o trabalho intelectual esforçado. Destaca-se, aqui, a máxima de que o conhecimento forma a mente.

Por sua vez, o currículo radical ou programa curricular mais progressista demonstrou-se insatisfatório. Resultado desse processo é a crise educacional da atualidade.

A proposta de Egan é o reconhecimento de que do currículo clássico pode-se aproveitar a ideia de que o conhecimento forma a mente. Entretanto, isso não se dá de uma forma simplista platônica, como se fosse uma realidade que prescindisse da ação humana. Ela implica em esforço, no uso dos instrumentais e ferramentais adequados. Do currículo radical, diz o autor, que se deve aproveitar a ideia de que a mente é formada pelos procedimentos intelectuais desenvolvidos no processo de aprendizagem (proximidade ao conceito de Rousseau e da ideia sociabilizante). Assim, delineia que o currículo deve ter como fundamento basilar os princípios derivados dos tipos característicos de compreensão dados pelas ferramentas cognitivas.

ALGUMAS IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO

Kieran Egan afirma, categoricamente, que cada uma das três concepções educacionais antigas implica um senso diferenciado quanto ao papel do professor e, consequentemente, da prática de ensino.

O senso do professor, na ideia sociabilizante, é tido como um iniciador e modelo de desempenho na observância estrita das normas, valores, habilidades e o conhecimento que, aos alunos, permitirão se aproximar do ideal de cidadania adulta.

Por sua vez, na tradição platônica o senso do professor se dá como uma autoridade em alguma área do conhecimento disciplinado, cuja responsabilidade básica é instruir e inspirar os alunos a atingirem o domínio intelectual.

Enfim, na tradição educacional do pensamento rousseauniano o senso do professor é concebido como um facilitador solícito, cuja responsabilidade básica é apoiar o desenvolvimento individual de cada aluno.

Conclui o autor que o papel adequado do professor, na atualidade, é feita de uma mistura desses três sensos se superpondo, a mistura varia dependendo do que se tem em mente; se são alunos primários, intermediários ou secundários.

Didaticamente, submete o senso do professor e o ensino ao crivo dos princípios da compreensão somática, romântica, filosófica, mítica e irônica. Assim, os tipos diferentes de compreensão também implicam suas próprias diferenças para o ensino. Por exemplo, a compreensão mítica busca envolver a pessoa em algumas diferentes abordagens, ênfase e atividades do que a pessoa estiver tentando desenvolver.

CONCLUSÃO

É de se reconhecer que o autor esmerou-se em abordar os três principais problemas educacionais enunciados no seguinte eixo: (1) a necessidade de moldar as crianças e os jovens às regras e convenções da sociedade adulta; (2) a transmissão do conhecimento para garantir que o pensamento dessas crianças e jovens esteja de acordo com o que há de real e verdadeiro a respeito do mundo; e (3) o estímulo ao desenvolvimento do potencial de cada aluno.

Ao concluir criticamente esses problemas enfrentados, assinala o autor que essas ideias são incompatíveis entre si e a causa da crise educacional vivida pela sociedade contemporânea. Essas metas conflitantes provocam choques em todos os níveis do processo educacional, desde decisões sobre o currículo até os métodos de ensino.

Diante desse quadro, Kieran Egan apresentou uma nova alternativa para combater essa crise educacional. Ele concebe a educação como o nosso aprendizado do uso de "instrumentos intelectuais", como a linguagem ou a alfabetização, que moldam a maneira como damos sentido ao mundo. Essas ferramentas mediadoras geram cinco tipos de compreensão - somática, mítica, romântica, filosófica e irônica - sobre as quais debruçou-se separando-as em capítulos e de maneira amiúde demonstrou a especificidade do princípio de cada modelo de compreensão sem prescindir de situa-los no contexto da formatação de uma currículo adequado e de uma prática sistêmica de ensino que seja relevante.

No último parágrafo da obra assinala de forma magistral: “ideia sobre a evolução transformaram o entendimento em quase todas as áreas de indagação humana. Mesmo quando eles começavam a tomar forma, no final do século XIX, naufragaram na educação devido a concepções inadequadas de que aspectos da historia evolucionaria e cultural humana estavam sendo recapitulados. Dede o abandono da recapitulação, o pensamento educacional persistiu de uma maneira não influenciada pela mudança padrão que as ideia de Darwin efetuaram no pensamento moderno. Pode parecer muito pouco do que se gabar, ter concebido uma teoria que consegue levar o pensamento educacional para o final do século XIX – mas foi o que conseguimos”.

7. EVES, Howard. Introdução à história da Matemática.Campinas: UNICAMP, 2004.

Elaborada por: Claudete de Sousa Nogueira e Amauri Tadeu Barbosa Nogueira

Introdução

A proposta do livro é introduzir a História da Matemática aos alunos de graduação dos cursos superiores de matemática. Além da narrativa histórica, há outros expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver os alunos São eles: um montante considerável da matemática genuína (curso de matemática); apresentação de exercícios; dicas e sugestões para resolução dos exercícios; sugestões temáticas para o aprofundamento pedagógico; apresentação do material histórico em ordem cronológica; conhecimento básico de aritmética, da álgebra, da geometria e da trigonometria; sugestão bibliográfica; panoramas culturais.

Parte 1

Antes do século XVII

Panorama Cultural I – Os caçadores das savanas

A chamada Idade da Pedra é caracterizada pela existência de povos nômades que habitaram a África, o Sul da Europa e da Ásia e a América central no período de 5 000 000 a 3000 a.C. A vida nômade desses povos e seu constante deslocamento em busca de alimentos e em resposta às mudanças climáticas forjavam sua cultura, isto é, tudo tinha que se adaptar a sua caça, desde a produção dos instrumentos de trabalho, sua arte que retratava as caçadas, até sua religião.

A evolução do homem é também relacionada a seu trabalho desde o Australopithecos que construía seus instrumentos de pedras toscas até o Homo sapiens(o novo homem) que substituiu as cavernas por estruturas móveis e dá início a produção de estatuetas de pedra e outros ícones religiosos. Como todas as épocas históricas , a Idade da Pedra não foi estática: a sociedade e a cultura foram mudando com o tempo para adaptar-se ao mundo em transição. Na Idade da Pedra essas mudanças ocorrem em três períodos: o Paleolítico ou antiga Idade da Pedra, no Mesolítico ou Média Idade da Pedra, no Neolítico ou Nova Idade da Pedra, também conhecida como Idade dos Metais(bronze e ferro).

A vida nômade, ocupada e muitas vezes curta dos povos caçadores das savanas, fez com que os avanços científicos e intelectuais fossem limitados, uma vez que, a estrutura social e econômica daqueles tempos não exigia conhecimentos mais complexos, além do sistema de contagem primitivo. Com o desenvolvimento da agricultura, intensiva e em grande escala, surge a necessidade de uma aritmética mais sofisticada.

Depois de 3000 a.C emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do Rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e do Rio Amarelo na China. Nessas comunidades a ciência e a matemática começam a se desenvolver.

Sistemas de numeração

1. Contagem Primitiva

Ao fazer um relato cronológico do desenvolvimento da matemática, o autor considera a mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número.

Partindo dessa premissa, o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos, de maneira conjectural. Com a evolução da sociedade, as contagens simples tornaram-se inevitáveis uma vez que, no cotidiano havia necessidade de contar os membros de uma tribo, os inimigos, os rebanhos, etc. Com o tempo foram surgindo arranjos de sons vocais para registrar verbalmente esses números e, mais tarde, com o surgimento da escrita, arranjos simbólicos .

A sistematização do processo de contar ocorreu quando se tornou necessário uma contagem mais extensa e se constituía em um dispositivo de correspondência conveniente em que se escolhia um certo número b como base e para os números maiores do que b os nomes eram essencialmente combinações. As palavras-números atuais na língua inglesa, por exemplo, são formadas tomando-se o 10 como base. Há nomes especiais para os números 1, 2 até 10 e quando se chega no 11 a palavra usada é eleven, ou seja um acima de dez, e assim por diante.

Há evidências de que outros números serviram de base para outras sociedades como o sistema quinário em algumas tribos da América do Sul, o 12 em épocas pre-históricas, o sistema vigesimal utilizado por índios americanos.

Também os números digitais (representados por meio de dedos) precederam os símbolos numéricos ou os nomes dos números. Assim, os símbolos escritos primitivos para 1, 2, 3 e 4 eram representados por riscos verticais ou horizontais, correspondente aos dedos levantados ou estendidos, remontando a palavra dígito(dedo).

No início os dígitos indicavam os algarismos de 1 a 9. Com o tempo passaram a abranger números maiores que ocorriam nas transações comerciais; perto da Idade Média tinham-se tornado internacionais. Os números de 1 a 9 e de 10 a 100 eram representados na mão esquerda e os números 100, 200...1000,...9000, na mão direita. Os números digitais, apesar do avanço, deixavam a desejar quanto a permanência e não eram convenientes para a realização de cálculos.

O Sistema de Agrupamento Simples é considerado o mais antigo tipo de sistema de numeração. É caracterizado pela escolha de um número b como base e adoção de símbolos para 1, b, b^2, b^3,etc. Qualquer número se expressa pelo uso desses símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.

Por outro lado, no sistema de Agrupamentos multiplicativo, após escolher uma base b, adotam-se símbolos para 1,2,...b-1 e um segundo conjunto de símbolos para b, b^2, b^3... Empregam-se símbolos dos dois conjuntos multiplicativamente de maneira a mostrar quantos unidades dos grupos de ordem superior são necessárias. Assim, designando-se os primeiros nove números pelos símbolos habituais, e designando-se 10, 100 e 1000 por a,b e c, então num sistema de agrupamento multiplicativo se escreveria: 5625= 5c 6b 2ª 5.

No Sistema cifrado depois de se escolher uma base b, adotam-se símbolos para 1,2,...b-1; b, 2b,...,(b-1)b,b^2,$2b^2$... e assim por diante. O sistema de numeração grego é um exemplo de sistema cifrado. Ele é decimal e emprega 27 caracteres.

Nosso sistema de numeração é um exemplo de sistema de numeração posicional. Para esse, depois de escolher uma base b, adotam-se símbolos para 1,2....b-1. Há no sistema b símbolos básicos, frequentemente chamados dígitos.

Assim um símbolo básico em qualquer numeral dado, representa um múltiplo de alguma potência da base, potência essa que depende da posição ocupada pelo símbolo básico. O sistema posicional é consequência lógica de um sistema de agrupamentos multiplicativos.

Os modelos de computação usados atualmente na aritmética elementar, tais como para a realização de multiplicação e divisão, surgiram somente no século XV, com a Computação Primitiva. O desenvolvimento tardio se explica pelas dificuldades intelectuais e dificuldades materiais encontradas nesse trabalho.

Para contornar essas dificuldades foi inventado o ábaco, que pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem.

O nome do sistema de numeração Indo-Arábico está relacionado ao fato de ser inventado pelos hindus e transmitido para a Europa Ocidental pelos árabes, provavelmente levados por comerciantes e viajantes pelas costas do Mediterrâneo.

Esses símbolos se estabilizaram com a invenção da imprensa de tipos móveis sendo observadas muitas modificações em sua grafia. A palavra zero, por exemplo, provem da forma latinizada zephirum que é uma tradução para o árabe de sunya, que em hindu significa vazio ou vácuo.

Panorama Cultural II – A Revolução Agrícola

O período de 3000 a 525 a.C foi marcado pelo nascimento de uma nova civilização humana, cuja centelha foi uma Revolução Agrícola. As sociedades baseadas na economia agrícola emergiram da Idade da Pedra nos Vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Esses povos criaram a escrita, trabalharam metais, construíram cidades, desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza.

Com a capacidade de ler e escrever veio a necessidade de novas tecnologias, e os primeiros engenheiros planejaram barragens e sistemas de irrigação.

Ao adotar um estilo de vida sedentário, construíram aldeias e vilas permanentes e pequenas cidades cresceram ao redor do Nilo, onde desenvolveram novas formas de organização política como as Cidades-Estados. Esse contexto favoreceu o desenvolvimento das realizações científicas.

A Matemática Babilônica e Egípcia

2.1 O Oriente Antigo

A Matemática primitiva teve origem em algumas áreas do Oriente Antigo e surge como ciência prática para assistir as atividades ligadas à agricultura e a engenharia. Essas atividades requeriam cálculo de um calendário utilizável, desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para serem empregados na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos entre outras; ou seja, a ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração prática. Assim, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Dessa maneira a álgebra envolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

2.2 Babilônia

As tábulas de argila têm sido fontes importantes nas pesquisas sobre o desenvolvimento da Matemática na Babilônia Antiga graças ao trabalho de arqueólogos em decifrar e interpretar muitas dessas tábulas matemáticas. Com a capacidade de ler textos cuneiformes das tábulas babilônicas escavadas, concluiu-se que essas dizem respeito a todas as fases e interesses da vida diária e percorrem muitos períodos da história babilônica

Mesmo as tábulas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixa claro que o sistema sexagesimal posicional já estava estabelecido há muito tempo. Assim, fica evidente a familiaridade desses povos antigos com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, notas promissórias, créditos, juros simples e compostos, etc.

Os processos aritméticos eram efetuados com várias tábuas envolvendo as de multiplicação, de inversos multiplicativos, quadrados e cubos...

A geometria babilônica se relacionava com a mensuração prática, marcada pelo seu caráter algébrico. Os babilônios estavam familiarizados com as regras gerais da área do triângulo, retângulo e do triângulo isósceles; do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo, etc.

Perto de 200 a.C a aritmética babilônia já havia evoluído para álgebra retórica bem desenvolvida. Resolviam equações quadráticas, cúbicas e biquadradas.

Dentre as tábulas matemáticas mais notáveis encontram-se aquela conhecida como Plimpton 322, ou seja, a da Coleção G.A. Plimpton da Universidade de Columbia sob o número 322.

2.3 Egito

No Egito, assim como na Babilônia a classe escrava era responsável pelo trabalho manual. A agrimensura e a engenharia prática, com sua matemática foram criadas para ajudar na execução desses trabalhos, como por exemplo, a construção de templos e pirâmides no Egito.

Dentre as grandes estruturas do Egito antigo que envolvem façanhas de engenharia destacam-se o Colosso de Ramsés II em Abu Simbel, a Grande Esfinge situada perto da grande Pirâmide de Gizeh e o Templo de Amon-Ra em Karnak.

Contudo, o semi-isolamento da sociedade, assim como a serenidade do rio Nilo, que dispensava as obras de engenharia e os esforços administrativos foram as causas da pouca evolução da matemática do Egito antigo.

Panorama Cultural III- Os Filósofos da Ágora

Provavelmente as realizações culturais mais impressionantes da Revolução agrícola tenham ocorrido na Grécia durante o período Helênico e na China, nos primeiros tempos do período clássico. As cidades-estados gregas apresentaram um progresso intelectual e científico surpreendente, destacando algumas como Corinto e Argos, Mileto e Esmirna e as mais importantes cidades-estado da Grécia: a comercial Atenas e a militarista Esparta.

A vida intelectual de Atenas girava em torno da Ágora, local em que agricultores do interior, mercadores e artesãos das lojas da cidade e mercadores e marinheiros recém chegados do cais misturavam-se e conversavam. Filósofos como Sócrates e Platão, cientistas como Aristóteles e dramaturgos com Aristófanes sentavam-se à sombra, cercados de discípulos, admiradores e cidadãos interessados e trocavam ideias

Foi nessa época que se escreveram histórias reais e se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática, assim como, foi também um período excelente para a literatura e o teatro. Enfim, naquelas cidadezinhas dos vales rochosos do extremo oriental do mar mediterrâneo, há mais de 2000 anos, lançaram-se os fundamentos da sociedade ocidental.

A Matemática Pitagórica

Com o aparecimento da nova civilização nas cidades comerciais espalhadas ao longo da Costa da Ásia menor e, mais tarde na parte continental da Grécia, a visão estática do Oriente Antigo sobre as coisas, tornou-se insustentável. Em uma atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar como e por quê.

Na matemática, assim como em outros campos, questões fundamentais são formuladas como "por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais" e "por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio"? Assim, a matemática no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo.

A geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. Creditam-se a ele os seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro efetua a bisseção do círculo em que é traçado

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais

3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais

4. Se 2 triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.

5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

A principal fonte de informações dos primeiros passos da matemática grega é o chamado sumário Eudemiano de Proclo que consiste em um breve resumo do desenvolvimento da geometria grega desde os seus primeiros tempos até Euclides.

Assim, como as descrições matemáticas de Tales, Pitágoras é também mencionado no Sumário Eudemiano. A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes básicas do programa de estudos pitagóricos.

É atribuído a Pitágoras a descoberta dos números amigáveis, que vieram a ter importante papel na magia, na feitiçaria, na astrologia e na determinação dos horóscopos. Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios.

Também se atribuem aos pitagóricos os números perfeitos, deficientes e abundantes que apresentam ligações místicas essenciais a especulações numerológicas.

A descoberta do teorema sobre triângulos retângulos é também atribuída a Pitágoras que deu sua primeira demonstração geral. Ligado ao teorema de Pitágoras está o problema de encontrar inteiros a,b,c que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente para os pitagóricos, pois desferia um golpe mortal na sua filosofia, segundo o qual tudo dependia dos números inteiros. As necessidades da vida diária requeriam, além da contagem de objetos individuais, a medição de varias quantidades, como comprimento, peso e tempo, que foi resolvida com as frações.

De acordo com os primeiros livros dos Elementos de Euclides, parte considerável da Álgebra geométrica é também atribuída aos pitagóricos. Essas preposições teriam sido desenvolvidas através de método de decomposição.

Em sua álgebra geométrica, os gregos se utilizavam de dois métodos principais para resolver certas equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas.

Os pitagóricos também se interessavam pelo problema de transformar a área de uma figura retilínea noutra figura retilínea. A solução dada por eles ao problema básico da construção de um quadrado de área igual à de um polígono dado pode ser encontrada nas proposições 42,44 e 45 dos livros dos Elementos de Euclides.

4. Duplicação, Trissecção e Quadradura

4.1 Período de Tales a Euclides

As conquistas das cidades Jônicas e das colônias gregas da Ásia menor pelo Império Persa em 546 a.C trouxeram como resultado a saída de muitos filósofos gregos de sua terra natal, como Pitágoras e Xenófones. Nas prósperas colônias gregas do sul da Itália desenvolveram escolas de filosofia e matemática em Crotona, sob liderança de Pitágoras, e em Eléia, sob liderança de Xenófanes, Zenão e Parmênides.

Com a derrota da Pérsia, a hegemonia de Atenas se consolidou e o período de paz atraiu muitos matemáticos para todas as partes do mundo grego.

A Guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta influenciou o desenvolvimento científico e intelectual, resultando em um pouco progresso da geometria, que se restringiu a região da Magna Grécia. Com o fim da Guerra, Atenas retomou sua liderança cultural onde se destaca os trabalhos matemáticos de Platão e seus discípulos. Platão nasceu em Atenas em 427 a.C, mais tarde fundou sua academia, que se transformou em um elo entre a matemática dos pitagóricos, mais antigos, com a da posterior escola de Alexandria.

Para Platão, o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu estado ideal.

4.2 Linhas de desenvolvimento Matemático

Consideram-se 3 linhas importantes e distintas de desenvolvimento durante os 300 primeiros anos da matemática grega:

- A matemática organizada nos elementos, iniciada pelos pitagóricos;

- O desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos, e processos somatórios como os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Antífon e Eudoxo e a teoria atomística de Demócrito;

- A Geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. A geometria superior se originou na tentativa de resolver os três agora problemas de construção:

1. Duplicação do cubo ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado

2. Trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais

3. Quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado.

Panorama cultural IV – O Oikoumene

Entre 550 a.C e 476 d.C o mundo ocidental foi dominado por uma série de grandes impérios. O Império Persa, os três grandes impérios gregos e o domínio romano. A expansão grega pela Ásia e pela África levou consigo a cultura e a ciência grega a novas partes do mundo.

O Oikoumene, ou seja, “ o mundo habitado” formado pela Grécia, Egito e Oriente Médio, foram dominados política e culturalmente pelos gregos e os historiadores lhe denominaram de mundo helenístico.

Por volta de 529 d.C a última escola grega, a Academia de Atenas, teve suas portas cerradas e a ciência grega chegava ao fim. Quase um milênio decorreria para que a ciência do mundo ocidental voltasse a florescer.

5. Euclides e seus elementos

A famosa Universidade de Alexandria, construída sob o governo de Ptolomeu em 300 a.C, se tornou a metrópole intelectual da raça grega. Para montar uma equipe intelectual de alto nível na universidade, Ptolomeu recorreu a Atenas, convidando o filósofo Demétrio para dirigir a grande biblioteca. Homens de talento e capacidade foram escolhidos para desenvolver os vários campos de estudos, entre eles, Euclides, escolhido para chefiar o departamento de Matemática.

Entre seus trabalhos, o mais notável, amplamente divulgado e que exerceu influência maior no pensamento científico são os Elementos. O grande mérito do trabalho de Euclides reside na seleção feliz de proposições e de seu arranjo em uma sequência lógica, a partir de umas poucas suposições iniciais. Por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

No entanto, contrariamente a impressão difundida, os Elementos de Euclides não tratam apenas de geometria, contém também teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro é composto de 465 proposições distribuídas em 13 livros. Euclides escreveu vários outros tratados, além dos Elementos, como o chamado “Os Dados”; divisão de figuras, Pseudarias ou o livro das falácias geométricas; Porismas; entre outros.

6. A Matemática grega depois de Euclides

Por mais de meio milênio, Alexandria se tornou o porto seguro para os intelectuais, destacando-se nas conquistas acadêmico culturais. Os matemáticos da antiguidade foram professores ou alunos da Universidade de Alexandria. Dentre eles, destacam-se:

Arquimedes – Natural da Cidade grega de Siracusa, desenvolveu seus trabalhos dedicados a geometria plana, a geometria espacial e a aritmética. Há dois trabalhos de Arquimedes sobre matemática aplicada: Equilíbrio de figuras planas e Corpos Flutuantes. Em 1906 foi descoberto em Constantinopla o tratado de Arquimedes: O Método. Esse tratado encontra-se em forma de uma carta endereçada a Eratóstenes onde aparecem informações sobre o Método utilizado para descobrir seus teoremas.

Eratóstenes – Natural de Cirene, na Costa Sul do mar Mediterrâneo, tornou-se célebre em aritmética devido a um dispositivo conhecido como crivo, usado para se acharem todos os números primos menores que um número *n* dado.

Apolônio – Nascido em Perga, no Sul da Ásia Menor, destacou-se principalmente devido à obra Seções Cônicas, um estudo exaustivo das curvas geométricas. Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente a aplicação de áreas.

Também se destacam:

-Hiparco, Menelau, Ptolomeu na trigonometria grega **;**

- Herão na matemática aplicada ;

- Diafanto de Alexandria no desenvolvimento da álgebra ;

- Papus que escreveu comentários sobre os Elementos e os Dados de Euclides e sobre o Almagesto e Planisfério de Ptolomeu ;

- Os Comentadores – escritores e comentadores que se dedicaram a perpetuar a memória da matemática grega. Entre eles Têon de Alexandria, Hipátia, Proclo, Simplício e Eutócio.

Panorama Cultural V – Os Impérios Asiáticos

Ao mesmo tempo em que gregos e romanos forjavam as instituições básicas da sociedade ocidental, as civilizações orientais também emergiam: na China, sobre as altas planícies que cercam o Vale do rio amarelo e na Índia, a sombra das figueiras bravas, abaixo dos picos elevados do Himalaia. No século VII d.C, com a ascensão do Islamismo, os árabes se afastaram do resto do mundo ocidental e traçaram seu próprio caminho cultural.

O Império chinês foi tão grande, poderoso e duradouro quanto o romano. Esse império produziu uma cultura rica e uma base intelectual sólida onde os eruditos chineses se interessavam mais por filosofia, arte e literatura do que pela ciência. Como consequência a matemática e a ciência chinesa se atrasaram em relação a outras matérias.

A Índia que quase sempre se compôs de um grande número de pequenos principados desunidos, sofreu numerosas invasões de tropas arianas, persas, gregas, árabes e inglesas. Os indianos desenvolveram uma cultura ampla e rica, que se preservou por séculos; após 1206 a ciência e a matemática indianas se fundiram com a arábica.

As maiores contribuições árabes à civilização foram o islamismo, criado pelo profeta Maomé, e a versátil língua árabe na qual o Alcorão foi escrito; os árabes inclinavam-se a aceitar os melhores elementos de outras culturas. Assim, preservaram grande parte da ciência grega e sobressaíram-se em matemática, astronomia e medicina.

7. A Matemática Chinesa, Hindu e Árabe

Um relato da história da matemática da China Antiga começa no período da Dinastia Shang (1500 a.C-1027 a.C) com algumas inscrições em ossos e carapaças de tartarugas que revelam um sistema de numeração decimal bastante próximo do sistema multiplicativo chinês-japonês tradicional. Esse sistema de numeração posicional desempenhou importante papel no caráter da matemática chinesa antiga, que girava em torno de cálculos. O familiar ábaco chinês, o suan pan, que consiste em contas móveis ao longo de varas ou arames paralelos por sobre um tabuleiro, descende dessa forma primitiva de calcular.

Na Dinastia Tang (618-960) reuniu-se uma coleção dos mais importantes livros de matemática disponíveis, para uso oficial nos exames imperiais. Num trabalho escrito por volta de 625, encontra-se a primeira equação cúbica chinesa mais complicada do que $x^3=a$.

Há evidências da influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa. Diante de numerosas invasões como a dos hunos, dos árabes e dos persas despontaram vários matemáticos hindus eminentes, destacando-se os dois Aryabhatas, Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara.

Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia e usavam os graus, minutos e segundos nas tábuas de senos que construíam.

Quanto aos árabes, contribuíram para a conservação de grande parte da cultura mundial, principalmente da forma em que se apoderaram do saber grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais para se instalarem junto às cortes.

Os árabes contribuíram no desenvolvimento da aritmética, da álgebra, principalmente no campo da álgebra geométrica.

Panorama Cultural VI – Servos , Senhores e Papas

Após o colapso do Império Romano, a civilização ocidental mudou em muitos aspectos. O Oeste se dividiu entre o mundo árabe-iraniano e a Europa foi dividida num ocidente germânico-latino e num oriente grego-eslávico. Os grandes impérios do mundo antigo deram lugar a baronatos feudais.

O feudalismo era caracterizado por uma única estrutura social onde a maior parte da população se constituía de camponeses pobres, ou servos, que cultivavam as terras dos senhores e pagavam pelo seu uso. Politicamente havia uma centralização de poder nas mãos dos senhores que, teoricamente eram vassalos de um rei ou do Sacro Império Romano.

A Igreja Católica mantinha seu poder absoluto sob a orientação de um papa que exercia suas funções na cidade de Roma, assistido por uma burocracia integrada.

Nesse contexto, o homem medieval se distanciou da ciência pura revelando suas habilidades para a engenharia nas funções de pedreiros e carpinteiros, ferreiros, moleiros entre outras. A fusão entre ciência pura e a tecnologia somente começaria no início do século XX.

Nos séculos XIV e XV a civilização europeia medieval dá lugar à civilização moderna, com a renovação da arte e ciência, o renascimento comercial e cultural.

No campo da matemática, muito pouco se fez durante o período da Baixa Idade Média, destacando-se alguns trabalhos como o do estadista romano Boécio, com seus livros de geometria e aritmética, os cléricos eruditos ingleses Beda e Alcuíno e o sacerdote e erudito francês Gerbert.

No século XV, a atividade matemática centrou-se nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa central e girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria. Sob a influência do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura destacam-se os trabalhos de Nicholas Cusa, Georg Von Peurbach, Johann Muller, entre outros.

As realizações matemáticas do século XVI se desenvolveram em torno da álgebra simbólica, dos cálculos com materiais hindo-arábicos, das frações decimais, das equações cúbicas e quárticas, dos números negativos e da trigonometria.

Parte 2 – Do Século XVII em diante

Panorama Cultural VII – Puritanos e Lobos do Mar

A chamada Era das explorações que teve início com as viagens comerciais nos séculos XIV e XV, com o renascimento comercial culmina com a conquista e colonização de territórios pelos países europeus. Conquistadores espanhóis, portugueses, holandeses e franceses impuseram violentamente sua hegemonia sobre diversos territórios, entre eles parte da América, incluindo impérios como Astecas e Incas; as comunidades tribais da Índia Ocidental; trechos da Costa Africana; as índias Orientais, entre outros. A colonização foi caracterizada também, pela utilização do trabalho escravo africano e indígena.

A Era das explorações teve um tremendo impacto sobre a Europa, resultando em um crescimento econômico e em uma revolução cultural e científica.

9. A Alvorada da Matemática Moderna

Os avanços políticos, econômicos e sociais do período das explorações, trouxeram grande ímpeto para a matemática no século XVII. Além do crescimento da atividade matemática, revelando vários nomes, houve também nesse período uma produção crescente de pesquisa.

Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente as demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores.

Os logaritmos, inventados por John Napier, perto do início do século XVII, é um instrumento de cálculo cujo poder está em reduzir multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. A palavra logaritmo significa “número da razão” e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão número artificial.

Thomas Harriot foi outro matemático que viveu a maior parte de sua vida no século XVII. Seu grande trabalho trata em grande parte da teoria das equações, o que contribuiu para estabelecer os padrões das equações de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus.

William Oughtred enfatizou os símbolos matemáticos, contribuindo com mais de 150 deles. Entre eles, três chegaram aos nossos tempos: o de multiplicação, os quatro pontos das proporções e o de diferença.

Dois importantes astrônomos contribuíram notavelmente para a matemática perto do século XVII: o italiano Galileu Galilei e o alemão Johann Kepler. Outros matemáticos que se destacaram foram Desargues e Pascal que abriram um novo campo, a geometria projetiva.

10. A Geometria Analítica e Outros Desenvolvimentos Pré-Cálculo

Há divergências de opinião sobre quem inventou a geometria analítica e mesmo sobra a época que merece o crédito dessa invenção. Sabemos que os gregos antigos dedicaram-se a álgebra geométrica e que a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura, e pelos gregos na confecção de mapas. No século XIV Nicole Oresme antecipou outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, conformando a variável dependente (latitude) com a independente (longitude), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos.

Assim, a maioria dos historiadores consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos René Descartes e Pierre Fermat .

A Geometria, de Descartes é o famoso terceiro apêndice da obra do *Discurso*, que ocupa cerca de cem páginas do trabalho completo e se divide em três partes a saber : primeira contém uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço real em relação aos gregos ; segunda, entre outras coisas, uma classificação de curvas agora superada e um método interessante de construir tangentes a curvas, e terceira trata da resolução de equações de grau maior que dois. Faz-se uso do que chamamos agora *regra de sinais de Descartes*, cuja finalidade é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio.

Pierre Fermat, tem como sua contribuição mais importante, entre tantas, a fundação da moderna teoria dos números que, junto com Pascal fundou a ciência da probabilidade. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. Não obstante a isto, outros matemáticos também deram sua contribuição como, Gilles Persone de Roberval e Evangelista Torricelli, ambos geômetros e físicos, Christiaan Huygens inventou a ocular acromática para telescópios, inventou a geometria da catenária.

11. O Cálculo e Conceitos Relacionados

É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu à ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto : ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes e curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

No século XVII a realização matemática mais notável foi a invenção do cálculo por Isaac Newton, que contribuiu com suas pesquisas em óptica formulando a teoria corpuscular da luz, lei da gravitação, mecânica celeste, leis do movimento planetário de Kepler, teorema do binômio generalizado, o método dos fluxos, com o conceito momento de um fluente.

Gottfried Wilhelm Leibniz contribuiu com a invenção do cálculo, teoria da lógica matemática, formulou as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou também a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão das classes e a implicação de proposições. Usou pela primeira vez o símbolo integral, contribuiu também no estudo das diferenças e derivadas como fazemos hoje.

Outros matemáticos também contribuíram como John Wallis com as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone, foi o primeiro a explicar de maneira razoável o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários ; deve-se a ele também a introdução do atual símbolo de infinito;

Isaac Barrow também contribuiu com seu triângulo diferencial, com o teorema fundamental do cálculo.

Com essas invenções a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou.

Panorama Cultural VIII -A Revolta da Classe Média

O século XVIII foi um século de turbulências e mudanças na Europa e na América. Uma nova classe média, a burguesia, emergiu derrubando a antiga ordem aristocrática na Inglaterra, França e Estados Unidos. Os ideais do feudalismo foram substituídos pela filosofia do liberalismo clássico, que teve como principal idealizador John Lock.

Lock acreditava que todos os seres humanos, pobres ou ricos, homens ou mulheres, camponeses ou senhores eram naturalmente iguais ou livres para dispor de seus bens e de suas pessoas como assim entendessem dentro dos limites da lei natural. Defendia a tolerância religiosa e acreditava na propriedade privada, desde que explorada em pequenas escalas e beneficamente.

As ideias de Locke influenciaram outros pensadores como o francês Jean Jacques Rousseau (1712-1778) que acreditava que todos os membros da sociedade são naturalmente iguais. No entanto, para ele, isso não queria dizer que as pessoas fossem iguais, ao contrário de Lock, acreditava que as mulheres fossem inferiores. Outros pensadores excluíam os escravos negros e algumas minorias religiosas, como os judeus, de seus conceitos de igualdade.

A burguesia crescente ganha poder nos últimos tempos da Idade Média, e as ideias do liberalismo clássico se tornaram um credo revolucionário, pois a aristocracia descontentava toda a classe média, constituída de proprietários agrícolas abastados, comerciantes, banqueiros, artesãos proprietários, advogados, médicos, servidores civis e outros, ou seja a, *a burguesia* europeia e americana. Thomas Jefferson durante a Revolução Americana (1776-1783) na constituição americana inspirou-se em Locke para redigir sua célebre Declaração de Independência.

Na Inglaterra, os londrinos, com seus aliados econômicos e os protestantes puritanos se uniram com Oliver Cromwell e empreenderam a

Guerra Civil Inglesa (1641-1649), a tensão continuou até quando o rei Stuart tentou reconverter a Inglaterra ao catolicismo, desencadeando um golpe sangrento imposto pelo exército conhecido como a Revolução Gloriosa (1688).

Já na Revolução Francesa (1789-1799), a burguesia aliou-se à população pobre de Paris para derrubar o rei. A partir de então, a burguesia estendeu por todo o Ocidente suas lutas contra a aristocracia feudal, impondo-se como a nova classe dirigente.

12. O Século XVIII e a exploração do cálculo

Este período testemunhou o desenvolvimento de áreas como a trigonometria, geometria analítica, álgebra clássica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores da matemática, constituindo a chamada matemática elementar.

O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII e atraiu o grosso dos matemáticos da época, que a partir do século XVIII têm a preocupação de dar uma fundamentação lógica rigorosa.

As principais contribuições à matemática no século XVIII foram dadas pela família Bernoulli. Os irmãos Jakob Bernoulli e Johanb Bernoulli estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas. Jakob, entre outras coisas, construiu o teorema de Bernoulli, distribuição de Bernoulli, da estática e da teoria das probabilidades ; a equação de Bernoulli, de um primeiro curso de equações diferenciais, os números de Bernoulli e os polinômios de Bernoulli de interesse da teoria dos números ; a lemniscata de Bernoulli dos cursos iniciais de cálculo.

Em 1690, Jakob, em sua resolução do problema da curva isócrona, publicada na Acta eruditorum, encontra-se pela primeira vez a palavra integral com sentido ligado a cálculo.

Johann contribuiu para a matemática mais que seu irmão, enriqueceu grandemente o cálculo e desempenhou um papel muito destacado na tarefa de divulgar potencialidades do novo campo de estudos na Europa. Escreveu sobre múltiplos tópicos como fenômenos ópticos relacionados com reflexão de curvas, retificação de curvas e quadratura de áreas por meio de séries, trigonometria analítica, cálculo exponencial e muitos outros. Escreveu sobre o problema de branquistócrona e o problema de tautócrona.

Seu filho Nicolaus escreveu o paradoxo de Petersburgo, sobre curvas, equações diferenciais e probabilidade.

De Moivre foi o primeiro a trabalhar com integral em probabilidade, bem como com a curva de frequência normal tão importante em estatística.

Brook Taylor e Colin Maclaurin são conhecidos pela fórmula de Taylor e fórmula de Maclaurin de expansão de funções em séries de potências. Leonhard Euler contribuiu com o teorema de Euler e a função de Euler, equação diferencial de Euler, teorema de Euler das funções homogêneas, curvas orbiformes e diagrama de Euler.

Outros matemáticos contribuíram como Alexis Claude Clairaut equação de Clairaut, Jean-Le-Round D 'Alembert contribuiu com a teoria das funções hiperbólicas, geometria descritiva, Maria Gaetana Agnesi, Madame du Châtelet , Joseph Louis Lagrange com equações de Lagrange, teorema de Lagrange, Pierre-Simon Laplace com mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodésia, Adrien-Marie Legendre com os elementos de geometria, produziu o Ensaio sobre a teoria dos números que constitui a primeira abordagem exclusiva da teoria dos números, Gaspard Monge, criador da geometria descritiva e pai da geometria diferencial, Lazare Carnot contribuiu com a Geometria de Posição e Ensaio sobra a teoria das transversais.

No século XVIII houve desenvolvimentos considerados, em áreas como a trigonometria, a geometria analítica, o cálculo, a teoria dos números, a teoria das equações, a probabilidade, equações diferenciais e mecânica analítica, desenvolveu também a criação de muitos campos novos como a ciência atuarial, o cálculo de variações, funções especiais, equações diferenciais parciais, geometria descritiva e geometria diferencial. Grande parte dessas pesquisas teve como fonte de inspiração a mecânica e a astronomia.

No entanto, os questionamentos se apresentam como por exemplo, na preocupação de d'Alambert com as bases frágeis da análise, no trabalho de Lambert com o postulado das paralelas, no esforço de Lagrange para tornar rigoroso o cálculo e nas elocubrações filosóficas de Carnot que mostram sinais da libertação da geometria e da álgebra e das futuras preocupações com os fundamentos da matemática do século XIX. Além disso, começam a surgir a figura do especialista, como Monge em geometria. Há que acrescentar ainda a adoção do sistema métrico decimal na França, em 22 de junho de 1799.

Outro acontecimento digno de registro no século XVIII, foi a entrada das mulheres no campo da matemática e das ciências exatas.

Panorama Cultural IX – A Revolução Industrial

A revolução Industrial que deu origem à sociedade moderna começou no século XVIII na Inglaterra. Durante o século XIX espalhou-se pelo continente europeu e pela América. Conforme proliferavam as grandes manufaturas e se esparramavam as cidades, a estrutura da sociedade mudava radicalmente.

Entre essas mudanças, o progresso tecnológico rápido desencadeou uma era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química. Embora de início a maioria das invenções fosse feita por artesãos e funileiros, as necessidades da indústria no século XX exigiram a participação de matemáticos e cientistas, com grau universitário. Nem todos apreciaram a Revolução Industrial. Os socialistas, embora não se opusessem a ela, malsinaram a má distribuição de riqueza que caracterizou o século XX. Os românticos, por sua vez, advogaram a ideias de épocas passadas.

13. As primeiras décadas do século XIX e a libertação da Geometria e a da Álgebra

Carl Friedrich Grauss é considerado universalmente como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos. Contribuiu para a astronomia, a geodésia e a eletricidade. Em 1801 calculou, mediante novo procedimento e com parcos dados, a órbita do planetóide Ceres, recentemente descoberto, e no ano seguinte, a do planetóide Palas. Em 1821 realizou uma triangulação Hanover, calculou a medida de um arco meridiano e inventou o heliógrafo. Em 1831 começou a colaborar com seu colega Wilhelm Weber em pesquisas básicas em eletricidade e magnetismo; em 1833 os dois descobriram o telégrafo eletromagnético.

Sophie Germain e Mary Fairfax Somerville são consideradas matemáticas que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento da matemática, assim como para a emancipação das mulheres na área.

No início do século XIX, vários matemáticos se destacaram, entre eles Jean Baptiste, Joseph Fourier e Simén Denis Poisson, praticamente contemporâneos, trabalharam em matemática aplicada.

O francês Augustin-Louis, o mais importante analista da metade do século XIX, contribuiu com estudos sobre matemática pura e matemática aplicada e seus estudos na matemática avançada, incluem convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidades e física matemática.

Dois desenvolvimentos matemáticos notáveis e revolucionários ocorreram na primeira metade do século XIX. Primeiro a descoberta de uma geometria auto consistente diferente da usual de Euclides e o segundo a descoberta de uma álgebra diferente da álgebra familiar dos números reais. A consequência imediata da descoberta de geometrias não euclidianas consistentes foi, é claro, a solução final do secular problema do postulado das paralelas.

O postulado das paralelas mostrou-se independente das outras suposições da geometria euclidiana e, portanto não podia ser deduzido dessas outras suposições como teorema. A geometria, como vimos, permaneceu acorrentada à sua visão euclidiana até Lobachevsky e Bolyai libertaram-na de suas amarras, criando uma geometria igualmente consistente em que abriram mão de um dos postulados de

Euclides. Com esse trabalho destruiu-se a antiga convicção de que só poderia haver uma única geometria, abrindo-se o caminho para a criação de muitas outras.

14. As décadas posteriores do século XIX e a Aritmetização da Análise

Até os tempos modernos pensava-se que os gregos haviam esgotado, bastante satisfatoriamente, a geometria sintética do triângulo e do círculo. A impressão que se tem hoje é que esse campo de investigações deve ser ilimitado. Grande parte desse material tem sido estendido a tetraedro e pontos, retas, círculos, planos e esferas especiais receberam nomes alusivos aos pesquisadores, originais subsequentes, que os investigaram. Entre eles figuram Gergonne, Nagel, Feuerbach, Hart, Casey e outros. Partes consideráveis do material acima têm sido resumidas e organizadas em numerosos textos recentes, muitas vezes com o título de Geometria Moderna.

Um autor que contribuiu foi Lorenzo Mascheroni que escreveu sobre física, cálculo e propôs o sistema métrica, publicou anotações acerca do Cálculo Integral de Euler.

À parte e independente da descoberta da geometria não euclidiana, o campo da geometria fez enormes progressos no século XIX. Uma das contribuições neste século foi da geometria projetiva que teve como matemático expressivo Jean Victor Poncelet, que estudou sobre mecânica aplicada, hidráulica, séries infinitas e geometria.

A geometria analítica teve em Julius Plucker dedicação à análise espectral, magnetismo e superfícies de ondas de Fresnel, matemática, e desenvolveu a geometria quadridimensional das retas, do espaço simultaneamente com sua teoria dos complexos e congruências de retas do espaço.

Uma outra contribuição foi a Geometria Diferencial, que é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo. Na maior parte dos casos, a geometria diferencial investiga curvas e superfícies nas vizinhanças imediatas de qualquer de seus pontos. Conhece-se esse aspecto da geometria diferencial como geometria diferencial local. Porém, há, às vezes, propriedades das estruturas totais de uma figura geométrica que decorrem de certas propriedades locais, que a figura apresenta em cada um de seus pontos. Isso leva ao que se chama de geometria integral ou geometria diferencial local.

Além da libertação da geometria e da libertação da álgebra, um terceiro movimento matemático profundamente significativo teve lugar no século XIX. Esse terceiro movimento, que se materializou lentamente, tornou-se conhecido como aritmetização da análise. Karl Weierstrass contribuiu com estudos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, teoria das funções complexas por meio de séries de potências e deu início à aritmetização da análise.

Duas matemáticas contribuíram de forma notável aos seus estudos, uma foi Sophia Korvin-Krukovsky, escreveu sobre a teoria das equações diferenciais parciais e a outra foi Amalie Emmy Noether que escreveu sobre anéis abstratos e teoria dos ideais, foram particularmente importantes no desenvolvimento da álgebra moderna.

Programa Cultural X -O Átomo e a Roda de Fiar

O século XX, foi marcado pelo fim do imperialismo, pela Primeira e Segunda Guerra Mundial, pela Revolução Russa, pelas independências das ex-colônias. Esses territórios colonizados foram transformados em fornecedores de matérias-primas, formando o grupo do Terceiro Mundo, viram-se às voltas com a fome, miséria, analfabetismo e doenças. A partir da segunda metade do século, também se destacam os movimentos pelos direitos civis nos Estados Unidos e na África, pela preservação do meio ambiente, pelos direitos das Mulheres na Europa, América e Ásia ; a cruzada antinuclear e a luta por uma tecnologia apropriada ; o fundamentalismo religioso nos Estados Unidos e no Irã. Nesse período a visão mecanicista do mundo foi simbolizada pelo átomo, e o maior representante foi Albert Einsten.

15. No Século XX

Deficiências lógicas dos Elementos de Euclides

O exame dos fundamentos e da estrutura lógica da matemática constituiu grande parte do trabalho desenvolvido nessa ciência no século XX. Isso, por sua vez, levou à criação *da axiomática, ou o estudo dos sistemas de postulados, e suas propriedades*. Há na axiomática outras propriedades a respeito de postulados, além da consistência, independência e equivalência. Esse estudo tem ligação estreita com a lógica simbólica e a filosofia da matemática. São muitos os nomes de expressão que contribuíram ou ainda contribuem para seu desenvolvimento, como : Hibert, Peano, Pieri, Veblen e outros.

Muitos dos *conceitos básicos da matemática* evoluíram na história dos conceitos, nas noções de espaço e de geometria de um espaço. Esses conceitos passaram por mudanças substanciais desde os dias dos gregos antigos. Para os gregos, havia apenas um espaço e uma só geometria. A partir do século XVII, o espaço passou a ser considerado como uma coleção de pontos com a criação das geometrias não euclidianas no século XIX. Estes conceitos passaram por evoluções e generalizações notáveis, e áreas de importância fundamental, como *a teoria dos conjuntos*, a *álgebra abstrata* e a *topologia* se desenvolveram enormemente.

A topologia começou como um ramo da geometria, mas durante o segundo quartel do século XX, passou por generalizações e se envolveu com tantos outros ramos da matemática que hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da matemática. Por esse ponto de vista pode-se considerar a topologia como o estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as transformações chamadas transformações topológicas.

A teoria geral dos conjuntos produziu alguns paradoxos tão profundos e inquietadores que se impôs um tratamento urgente. A própria lógica, como instrumento usado pela matemática para obter conclusões a partir de hipóteses aceitas, foi esquadrinhada minuciosamente, vindo a nascer daí *a lógica matemática*. Os laços entre a lógica e a filosofia levaram à várias e importantes escolas de *filosofia matemática* dos dias atuais.

Na filosofia matemática existem três correntes principais, cada uma com um grupo considerável de seguidores e com uma bagagem volumosa de trabalhos produzidos. São conhecidas como escola logicista, cujas figuras principais são Russell e Whitehead ; escola intuicionista, liderada por Brouwer, e escola formalista, cujo desenvolvimento se deve especialmente a Hilbert. Há, evidentemente, outras filosofias da matemática nos dias atuais além dessas, algumas independentes e algumas que são simples mesclas das três principais, mas elas ou não foram cultivadas em escala considerável ou não empreenderam uma reconstrução da matemática em grau equivalente ao daquelas mencionadas.

A revolução computacional do século XX afetou também profundamente muitos ramos da matemática. Definitivamente, a velha imagem da árvore da matemática, tornou-se obsoleta. E o que é bastante curioso, com grande parte da matemática, a maioria dessas considerações *modernas* têm suas raízes no trabalho dos gregos antigos. A matemática moderna nasce da preocupação da tentativa de vários grupos interessados no ensino da matemática dando ênfase na abstração e na análise das estruturas e modelos subjacentes e se preocuparam em adaptar tais características ao ensino empenhados a reformular e modernizar a matemática escolar.

8. GARBI, Gilberto G. A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

Entre outras reflexões, o livro volta a um debate educacional antigo: Por que tantos alunos odeiam a matemática? Por que não utilizar a história e a vida dos grandes matemáticos para estimular e atrair os jovens e melhorar o ensino e o estudo dessa ciência? O problema não é que as pessoas não entendam a matemática, o problema é que elas nunca chegam até ela! Os que conseguem ultrapassar as primeiras barreiras conseguem ver, até com certa facilidade, as belezas da matemática. Até mesmo para os matemáticos algumas partes são difíceis, mas a matemática que é ensinada na escola básica não apresenta maiores dificuldades.

Garbi propõe um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, focalizando a vida dos gênios da ciência e mostrando como foram desenvolvidos os conceitos e princípios centrais da Matemática. Em 24 capítulos, o leitor passa por um prólogo delicioso - O que é a Matemática - e segue com os mesopotâmicos, egípcios e chineses, Tales de Mileto, Pitágoras, Platão, Arquimedes, Nove Séculos da Universidade de Alexandria, Isaac Newton, Euler e Gauss, para chegar ao adorável capítulo sobre “As Mulheres e a Matemática”.

Garbi mostra que o homem dominou a natureza auxiliado pelos conhecimentos da Matemática: *“A civilização moderna e nosso modo de viver atual só se tornaram possíveis, porque o Homem, por meio da Matemática, acumulou vastos conhecimentos sobre mundo físico e com isso, conseguiu, parcialmente, dominá-lo e colocá-lo a seu serviço”.* Toda tecnologia de nosso tempo está baseada em alicerces matemáticos - seja ela energia elétrica, telecomunicações, computadores, aviões, veículos espaciais - ou produtos e coisas de uso corrente como televisores, aparelhos de som, automóveis, geladeiras, equipamentos de medicina, casas, pontes, produtos químicos, biotecnologia e tantos avanços do progresso humano que 'exigem, em sua concepção e produção, elevados conhecimentos matemáticos, desenvolvidos ao longo, pelo menos, dos quatro últimos milênios, em especial dos séculos 17, 18 e 19. Vivemos em mundo altamente dependente da matemática e que ela está presente em tudo em nossa volta, embora a maior parte da pessoas não perceba, e não raro, declare detestá-la, como é o caso de grande parte dos alunos que ainda não descobriram o maravilhoso mundo da Matemática.

Apesar da onipresença e influência da “Rainha das Ciências”, ainda não se tem uma resposta satisfatória para a pergunta: “O que é Matemática”.

Uma definição da Matemática constante em dicionário diz: “ciência das quantidades e das formas”, referindo-se apenas à Aritmética e Geografia e ignora as análises combinatórias, a teoria das probabilidades, as séries infinitas, a Teoria dos Números complexos, o Calculo Matricial, a Teoria dos Grupos, a Teoria Analítica dos Números, a Teoria dos Conjuntos, a Axiomática, a Lógica matemática etc. A Matemática deve ser encarada enquanto uma ciência em desenvolvimento.

E a produção de conhecimento matemático não pára. Garbi cita os matemáticos norte-americanos Philip Davis e Reuben Hersch, para nos lembrar que 'existem atualmente mais de 4 mil ramos da matemática, dentro dos quais se publicam, a cada ano, cerca de 200 mil teoremas' - nesse universo que inclui a Análise Combinatória, a Teoria das Probabilidades, as Séries Infinitas, a Teoria dos Números Complexos, o Cálculo Matricial, a Teoria dos Grupos, a Teoria Analítica dos Números, a Teoria dos Conjuntos, a Axiomática, a Lógica Matemática e outras especialidades.

Tanto que surge outra definição: “Matemática é o que os matemáticos fazem”, afirmando ser impossível definir a matemática, pelo fato de estarmos diante de um “conceito primitivo” que intriga e gera polêmica entre os filósofos: *“a Matemática existe por si mesma no Universo e nós a desvendamos ou ela é mais uma nobre criação da mente humana?”* De novo, muitas opiniões divergem. Uns argumentam que ninguém viu na natureza, números complexos, vetores ou matrizes e que coisas assim são criação humana. Outros argumentam que existem no universo formas geométricas como caracóis, trajetórias retas e orbitas elípticas. Há também os que tem uma posição intermediaria, ou seja, uma parte da matemática é criação humana e a outra é da natureza. A questão, então, é muito difícil e permanece em aberto. Por isso, entende-se o porquê esta definição encontra muitas objeções. Muitos consideram que é impossível definir o que é matemática.

“A Rainha das Ciências” narra histórias e biografias de cada gênio. Alguns capítulos são dedicados a Isaac Newton, e mulheres matemáticas - como Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Laura Catharina Bassi, Maria Gaetana Agnesi, Sophie Germain, Mary Fairfax Somerville ou Sofia Kovalevskaia.

Ao iniciar o estudo da Matemática, a primeira questão que surge é: “quando, como e onde começou a Matemática? Uma dos marcos cruciais da História da Humanidade foi a invenção da Agricultura, que exigiu um maior senso de observação da natureza, em vista de seu domínio. Nesse período os conhecimentos matemáticos do Universo começam a se desenvolver, por volta de 9.000 a.C. Por volta de 3.500 a.C. os sumérios começaram a desenvolver um sistema de símbolos que evoluiu até tornar-se a escrita cuneiforme e, posteriormente, os egípcios criaram os hieróglifos. O objetivo era registrar e controlar elementos fundamentais da produção e dos impostos. Alguns autores afirmam que a escrita foi criada para fazer registros numéricos, mais tarde sendo aplicadas a narrativas. Mas é fato que a invenção da escrita (arte de grafar) deu forte impulso à Matemática que, a princípio, surgiu como um aprendizado indutivo ou empírico, a partir da observação da natureza. De tal forma que os primeiros filósofos consideravam os princípios matemáticos como verdades gerais e imutáveis. Outro caráter da Matemática nascente é a associação do conhecimento com a visão mítica ou religiosa do mundo: *“regra para chegar-se ao conhecimento de todas as coisas obscuras, de todos os segredos que as coisas contêm”* (p. 13) Já os gregos, no século VI a.C. desenvolveram a *“Matemática dedutiva introduzindo o conceito de* ***prova*** *ou* ***justificativa lógica”***, uma das formas de revelar segredos escondidos.

Tales de Mileto, entre 640 a.C. e 564 a.C., teve importante papel ao sustentar que as *“verdades devem ser justificadas, demonstradas, provadas por meio do raciocínio”.* Pitágoras, de Samos, entre 586 a.C. a 500 a.C., influenciado pelas idéias de Tales, realizou diversas demonstrações rigorosas, considerando a Matemática como *abstrata,* pairando acima da realidade física, um descolamento da realidade concreta. Para eles, Deus seria o grande geômetra do Universo. Foi nesse período que se disseminou no mundo grego o interesse pela Matemática. A mais conhecida contribuição de Pitágoras é seu teorema.

Outros personagens como Zenão de Eléia, Hipócrates, Hípias e Demócrito desenvolveram estudos matemáticos.

Os três problemas clássicos. 1) Trissecção do Ângulo: como dividir, sem auxílio de instrumentos, um ângulo qualquer em três partes iguais? 2) Quadratura do Círculo: como construir um quadrado de área equivalente à de um dado círculo? 3) Duplicação do cubo: dado um cubo, como construir, sem régua e compasso, o lado de outro cubo cujo volume seja o dobro do volume do primeiro? O estudo desses problemas impulsionou a Geometria. Para tentar resolver algumas dessas questões, o matemático grego Hípias inventou a Quadratriz, gerada da seguinte forma: *"sejam OA e OB raios perpendiculares de uma circunferência de centro O; seja também, BD uma semi-reta perpendicular a OB. Caso BD se desloque uniforme e paralelamente em direção a AO e que o raio OB comece a girar uniformemente em direção a OA, de modo que BD e OB cheguem juntos em OA".* Ou, dito de outra forma quando OB tiver girado 1/5, 1/3, 1/2 , 3/4, etc. do quadrante, BD terá se deslocado, respectivamente, 1/5, 1/3, 1/2 , 3/4, etc. do segmento OB. A quadratriz é a curva formada por todos os pontos de cruzamento de cada posição do raio com a respectiva posição de BD. (p. 43)

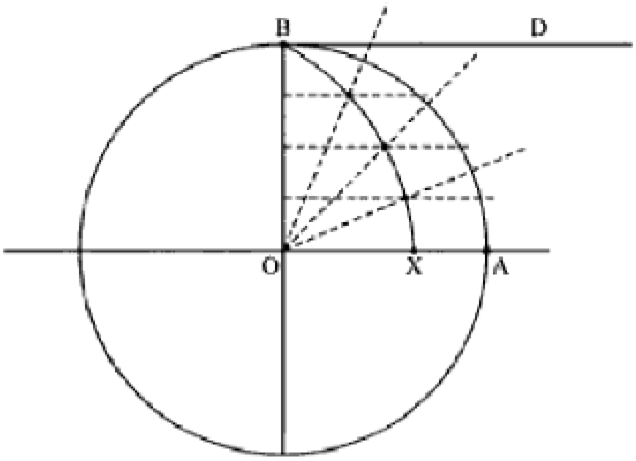

Figura 1: Quadratriz

Dessa forma, pode-se realizar a trissecção, ou seja, dividir qualquer ângulo em qualquer número de partes iguais, mesmo que alguns outros pontos infinitos dependam de régua e compasso para sua construção. A Quadratriz resolveria o problema da quadratura do círculo, caso pudesse ser utilizado régua e compasso. Essa é uma das formas de se exercitar o raciocínio matemático para tentar solucionar os problemas matemáticos.

Platão, que viveu de 426 a. C. a 347 a.C., postulava que *"tudo que acontece no mundo tem uma causa encontrável no próprio mundo".* E de fato marcou a Matemática nesse período a Teoria das Proporções: mAB < n BC implica mA'

B’ < nB’ C’. Para Garbi, este foi um dos maiores marcos da história da Matemática, permitindo evolução dos conceitos.

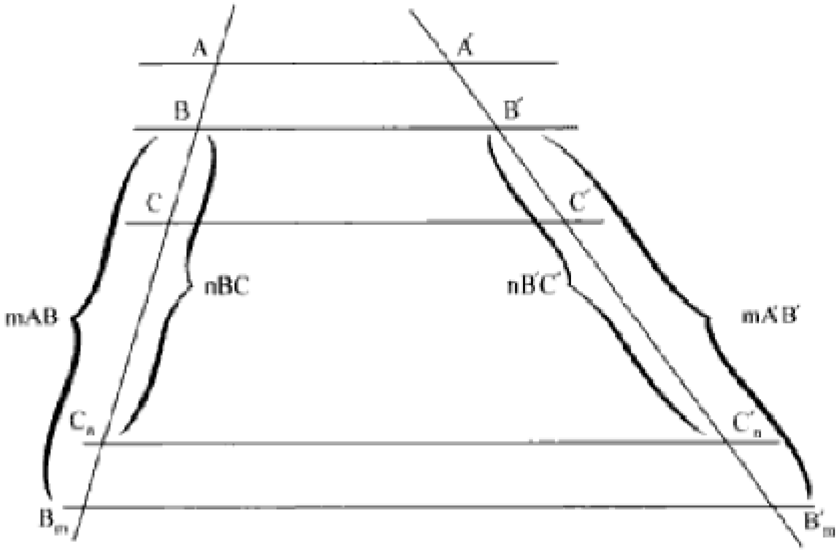

Figura 2: Teorema de Tales, com AB e BC não necessariamente comensuráveis

Posteriormente a Matemática recebeu as contribuições de Euclides, com a Geometria Euclidiana que exerce sua influência ao longo dos séculos ao afirmar que *“na Matemática não há caminhos especiais para os reis”.* Sua principal contribuição foi sistematizar e provar o conhecimento matemático produzido e de dar lógica aos postulados básicos existentes.

O capítulo sobre a matemática contemporânea, trata, com razoável familiaridade o trabalho de James Clerk Maxwell, Claude Shannon (o pai da Teoria da Informação), Charles Babbage, Alan Turing e John von Neumann - todos bem próximos do mundo computacional.

Um episódio impar dentro da matemática, é que na segunda metade do século XIX, um dinamarquês de vasta cultura chamado J.L. Heiberg, decidiu publicar estudos profundos sobre as obras dos gregos Euclides e Arquimedes. Gastou vários anos de sua vida em exaustivas pesquisas pela Europa e Oriente Próximo. Entre 188e e 1888 publicou uma edição completa e minuciosa dos Elementos de Euclides.

Em 1906, pesquisando na biblioteca de um monastério em Istambul parou com um pergaminho de texto cristão. Ele percebeu que um texto mais antigo havia sido apagado para que um mais novo fosse feito. Tentando recuperar o apagado, maravilhou-se ao ver que se tratava de uma obra perdida de Arquimedes, hoje conhecida como “O Método”, ali copiada por um monge do século X.

Sendo assim, existem alguns atributos que distinguem os gênios das pessoas comuns: a capacidade de perceber correlações entre campos aparentemente dissociados e a intuição, visão interior, ou visão além-olhos, que leva o gênio a analisar um conjunto de entes e não outro, quando procura realizar uma descoberta.

Interessante também é ver até onde Euclides e outros chegaram com os conhecimentos relativos ao circulo e a Esfera:

1) Sabia-se que o caminho para determinação de comprimentos de linhas curvas ou de áreas e volumes de figuras delimitas por linhas e superfícies curvas passava pelo método da exaustão, de Eudoxio.
2) Hipocrates descobria e Eudoxio provou que a área do circulo é proporcional ao quadrado do diâmetro ou do raio, mas desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade.
3) Sabia-se que o perímetro da circunferência é proporcional ao seu diâmetro, mas, igualmente desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade.
4) Sabia-se que o volume da esfera é proporcional ao cubo do raio mas, também, desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade.
5) Euclides não faz qualquer menção a medida de superfície da esfera, embora talvez cogitasse que fosse proporcional ao quadrado do raio.

Hoje sabemos que o coeficiente de proporcionalidade da área do circulo em relação ao quadrado do raio é o célebre numero mas, até Arquimedes entrar em cena, nenhum matemático havia encontrado uma forma de caçula-lo.

No pequeno tratado denominado A Medida de um circulo, ele começou provando que a área daquela figura é igual a de um triangulo cuja base é o comprimento da circunferência e cuja altura é o raio do círculo.

Bertrand A. W. Russel (1872 – 1970), é a melhor citação para conclusão desta obra : "A matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza, uma beleza fria e austera, como aquela da escultura, sem apelo a qualquer parte da nossa natureza mais fraca, sem as encantadoras armadilhas da pintura ou da musica, mas sublimemente pura, e capaz de uma rigorosa perfeição que somente a maior das artes pode exibir.

9. IFRAH, Georges. Os números: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

Introdução:

De onde vêm os algarismos

A história da invenção dos números é a "a história de uma grande invenção", mais especificamente, de uma sucessão de invenções divididas por várias dezenas de milênios. Esta não é, no entanto, uma história situada no mundo das ideias, contínua, sem referência a dados concretos. Trata-se, portanto, da história das necessidades e das preocupações de grupos sociais ao buscarem enumerar seus componentes, seus bens, suas perdas, seus prisioneiros; ao buscarem datar a fundação de suas cidades e de suas vitórias pelos meios a sua disposição como os empíricos, de que serve de exemplo o entalhe, e os estranhamente mitológicos, como no caso dos egípcios.

É também uma história sem autoria, a despeito da importância das invenções. Essa história não concedeu certificados, pois foi e é feita por e para as coletividades. Mas isto não que dizer que não haja algumas assinaturas: elas aparecem, e muitos, mas como registro de venda de um proprietário de rebanho, ou o vencedor de determinada batalha seus nomes, que não nos dizem nada, associando-os aos algarismos. Com frequência, conhecemos também os nomes daqueles que transmitiram, exploraram, comentaram algarismos e sistemas numéricos, mas os dos próprios inventores estão certamente irrecuperavelmente perdidos.

A pré-história dos números

Não sabemos de nada sobre "onde e quando a extraordinária aventura da inteligência humana começou.

No tempo em que o número era sentido

O grau zero quanto ao conhecimento dos números ainda existe hoje em hordas "primitivas" tais como os zulus e pigmeus da África. Eles só conhecem dois "nomes de números" literalmente: um para a unidade e um outro para o par". Fato é que a concepção de número dessas hordas não se dá sob a perspectiva da abstração. Tal concepção é "sentida", analogamente como "percebemos" um aroma, um ruído etc. Esta capacidade d percepção natural é chamada, em geral, de percepção direta do número ou *sensação numérica.*

Um e dois: os dois primeiros números inventados

Um e *dois* são os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano. O Um é o homem ativo, associado à obra da Criação. É ele próprio inserido num grupo social e sua própria solidão perante a vida e a morte. É também o símbolo do homem em pé, único ser vivo capaz disto, como também do falo ereto que diferencia o homem da mulher. O Dois associa-se à dualidade do masculino e do feminino, à simetria aparente do corpo humano; simboliza, ainda, a oposição, a complementaridade, da divisão, da rivalidade, do conflito.

O número e a criança pequena

Neste tópico o autor apresenta as fases pelas quais passa a criança, dos seis meses aos três anos, sendo que nesse período a criança passa da compreensão global do seu espaço imediato até a aquisição da fala e aprendeu a nomear os primeiros números.

Os limites da sensação numérica

O tópico apresenta considerações, retomando os processos utilizados por povos antigos para contar, evidenciando-se aí a nossa limitação de percepção de numérica – até 4!, mas superamos essa restrição à sensação numérica por meio de procedimentos mentais.

Como o homem aprendeu a contar

O início da contagem se deu pela *Correspondência um a um,* recurso que traz, mesmo a mentes não muito brilhantes, a possibilidade de comparar, facilmente, duas coleções de seres ou de objetos, de mesma natureza ou não, sendo desnecessário que se lance mão da contagem abstrata. Este procedimento permite também abranger diversos números, sem contar e sem nem mesmo nomear ou conhecer as quantidades envolvidas. Deve-se, indubitavelmente, a este princípio a possibilidade de o homem pré-histórico poder praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato.

Quando procedemos à equiparação termo a termo dos elementos de uma primeira coleção com os de uma segunda, damos origem a uma noção abstrata, totalmente independente da natureza dos seres ou dos objetos presentes, que exprime uma característica comum a estas duas coleções. A *propriedade de equiparação* elimina a distinção existente entre dois conjuntos em razão da natureza de seus elementos respectivos. É em função desta noção abstrata que o recurso da *correspondência um a um* pode exercer um papel fundamental em termos de enumeração.

Contar: uma faculdade humana

Contrariamente à percepção direta dos números, a contagem não é uma aptidão natural. A contagem é uma peculiaridade humana*:* diz respeito a um fenômeno mental complexo, intimamente relacionado ao desenvolvimento da inteligência.

"Contar" os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo, uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico correspondente a um número tirado da sequência natural dos números inteiros (começando pela unidade e procedendo pela ordem), até encerrar os elementos. Nessa coleção assim transformada em sequência, cada um dos símbolos será, conseqüentemente, o *número de ordem* do elemento ao qual foi atribuído. E o número de integrantes deste conjunto será o *número de ordem* do último de seus elementos. São três as condições psicológicas indispensáveis a fim de que um homem saiba contar e compreender os números no sentido em que entendemos:

- capacidade de atribuir um *lugar* a cada ser que passa diante dele;
- capacidade de intervir para introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as que a precederam;
- deve saber entender esta sucessão simultaneamente.

A permissão de um progresso decisivo na arte do cálculo abstrato, a compreensão dos números exige.

Os dois aspectos do número inteiro

A noção de número abrange dois aspectos complementares: o *cardinal,* baseado unicamente no princípio da equiparação, e o *ordinal,* que exige ao mesmo tempo o processo de agrupamento e de sucessão. Nossos progressos em matemática devem-se ao fato de termos aprendido a identificarmos esses dois aspectos do número.

Dez dedos para aprender a contar

Dentre as técnicas corporais do número, os dedos da mão perfazem um recurso que desempenhou realmente um papel determinante. A mão do homem é portadora de inúmeros recursos. Ela constitui uma espécie de *instrumento natural,* particularmente designado para a aquisição dos dez primeiros números e para o aprendizado da aritmética elementar.

A invenção da base

A humanidade aprendeu a contar nos dez dedos das mãos. Esta preferência quase geral pelos grupos de dez foi comandada pelo *acidente da natureza* — a anatomia das nossas duas mãos. Mas nem todas as civilizações resolveram do mesmo modo o problema da base. A base dez não foi a única . Alguns povos assimilaram o hábito de agrupar os seres e os objetos por feixes de cinco. Outros, ainda, preferiram adotar uma base vintesimal. Muito mais difundida é a base duodecimal.

Alguns povos adquiriram o hábito de agrupar os seres e os objetos por feixes de cinco. A origem deste modo de contar é antropomórfica. A base cinco tem de fato sua razão de ser nos povos que aprenderam a contar numa única mão e a prolongar a série dos números servindo-se da outra como referência. Outros povos preferiram adotar uma base vigesimal, habituando-se a agruparem por vintenas e potências de 20 os seres e objetos enumerados. Foi assim, por exemplo, o caso dos maias e dos astecas da América Central pré-colombiana.

Esses povos adotaram a base vinte após perceberem que, abaixando-se um pouco, podiam contar seus dez artelhos. A numeração vigesimal não foi muito difundida no curso da história, mas em diversas línguas há traços de uma tradição, provavelmente muito antiga, de contar por vintenas. Muito mais difundida é a *contagem duodecimal,* que, se tivesse evoluído, poderia ter dado origem a uma numeração completa de base, o que nos teria dado um sistema certamente mais cômodo que a nossa numeração decimal, poiso número doze é divisível ao mesmo tempo por 2, 3, 4 e 6. Essa numeração foi empregada em antigos sistemas comerciais, dos quais temos o testemunho nas nossas *dúzias* e grosas (dúzias de dúzias), ainda conservadas para os ovos e as bananas, por exemplo. Os sumerianos (e, depois deles, os assírio-babilônios) atribuíram a esta base e a seus múltiplos e divisores um papel preponderante nas suas medidas de distância, de superfície, de volume, de capacidade e de peso. Além disso, tinham o hábito subdividirem o dia em doze partes iguais, denominadas *danna, cada* uma equivalendo a duas de nossas horas. Eles utilizavam para o círculo, assim como para a elipse e o zodíaco, uma divisão em doze bérü (ou setores) de 30° cada. O relativo sucesso desta base se deve, sem dúvida, às suas vantagens práticas, embora sua origem ainda seja desconhecida.

A enigmática base sessenta

Esta base foi primeiramente empregada pêlos sumerianos, que tinham o hábito de contar por base sessenta e por potências de 60. Em seguida, foi transmitida aos matemáticos e astrônomos babilônios sucessores dos sumerianos na Mesopotâmia, que dela se serviram para elaborarem um avançado sistema de numeração, antes de nos deixá-la a nós como herança, por intermédio dos astrônomos gregos e árabes. Ainda hoje, não se tem uma boa explicação do motivo pelo qual a ideia de uma base tão elevada teria-se imposto ao espírito dos sumerianos. Diversas hipóteses surgiram a esse respeito, nenhuma parece conclusiva, porém. Segundo Ifrah, há duas hipóteses prováveis: em primeiro lugar, que em consequência da conjunção de duas culturas diferentes, uma com o hábito de contar por dúzias, e a outra por dezenas, a escolha da base sessenta tenha resultado, em certos meios instruídos, de uma combinação *científica* da base doze com a base dez; em segundo lugar, pode-se supor que a escolha da base sessenta tenha sido o resultado de uma combinação *natural* da base doze e da base cinco, sendo ambas de origem manual. Para Ifrah, esta segunda hipótese apresenta-se mais coerente, haja vista que foram detectados traços que a evidenciam na língua sumeriana.

A aquisição da faculdade de contar e a descoberta fundamental do princípio da base representam um papel de relevada importância na história das civilizações. Elas favoreceram um grande número de criações, de invenções e até mesmo de revoluções nos mais diversos campos, como por exemplo na economia e nas trocas comerciais. Ao aprender a contar abstratamente e a agrupar toda diversidade de elementos segundo o princípio da base, o homem aprendeu a *estimar, avaliar e medir* grandezas diversas (pesos, comprimentos, áreas, capacidades, etc.)- De igual maneira, ele aprendeu a atingir e a conceber números cada vez maiores antes mesmo de chegar ao alcance do domínio da ideia de infinito.

O homem foi, assim, capaz de elaborar inúmeras técnicas operatórias (mentais, concretas ou. mais tarde, escritas) e de estabelecer os primeiros rudimentos de uma aritmética que seria, inicialmente, prática, antes de se tornar abstrata, e de conduzir à álgebra.

As primeiras máquinas de contar

A mão do homem é o mais antigo e difundido acessório de contagem e cálculo utilizado pelos povos ao longo dos tempos. E ela não só serviu para contar, mas para isto e, também, para efetuar diversas operações aritméticas; é considerada a primeira *máquina de calcular.*

Mas primeiro suporte concreto da contagem e do cálculo, não passa de um modo *fugidio de registro do conceito numérico.* Com efeito, a mão atende à necessidade da representação visual dos números, mas seguramente não à de memorizá-los.

Com a intensificação das comunicações entre as diferentes sociedades, e o desenvolvimento do artesanato e do comércio a humanidade, que ainda não lia nem escrevia e desejava fazer o balanço de seus bens e de suas atividades econômicas, se viu diante de um novo problema: como reter por muito tempo a lembrança de uma enumeração? E, como não encontrou, no seu berço, nada que pudesse atender a esta necessidade, ela teve de fazer de novo um esforço de criação.

Números em cordões (quipo ou quipu, palavra que significa nó) preenchiam funções muito diversas, tendo a cor dos cordões, o número, a posição relativa dos nós, o tamanho dos agrupamentos e seus espaçamentos, significados bem precisos. Eles serviam, por exemplo, de suporte para a representação de fatos litúrgicos, cronológicos ou estatísticos. Serviam de calendário e permitiam a transmissão de mensagens. Sua utilização principal dava-se na contabilidade, uma vez que o sistema correspondente fundava-se numa base decimal. Há vários sistemas incríveis que, no entanto, não são privilégio único dos incas e das populações latino-americanas:

- O uso de cordinhas com nós são encontrados em diferentes regiões a partir da alta Antiguidade.

- O *entalhe,* método mais universalmente comprovado na história da contagem, além de ser o mais antigo, é o mesmo que havia permitido ao homem encontrar uma solução numa época em que ainda não sabia contar de modo abstrato**.**

Das *pedras aos cálculos* (montes de pedras).

Um dos métodos mais primitivos que desempenhou um papel importante na história da aritmética, já que foram as pedras que permitiram verdadeiramente ao homem iniciar-se na arte *do cálculo* (do latim *calculus,* pequena pedra). As pedras estão na origem dos *ábacos* e dos *contadores mecânicos,* instrumentos estes que o homem inventou no dia em que necessitou fazer cálculos cada vez mais complicados e que usou exaustivamente quando ainda não dispunha do cálculo escrito por meio dos algarismos arábicos.

Tábuas de contar. Para os povos ocidentais, os ábacos mais correntes foram tábuas ou pranchas com divisões em diversas linhas ou colunas paralelas que separavam as diferentes ordens de numeração. Para representar números ou para efetuar operações, ali se colocavam pedras ou fichas que tinham o valor de uma unidade simples cada uma. Essas peças eram chamadas de *psephoi* pêlos gregos e de *calculi* pelos romanos.

A invenção dos algarismos

Dois acontecimentos foram, na história da humanidade, tão revolucionários quanto o domínio do fogo, o desenvolvimento da agricultura ou o progresso do urbanismo e da tecnologia: a invenção *da escrita* e *a invenção do zero e dos algarismos denominados arábicos.*

Da mesma forma que os primeiros acontecimentos, estes transformaram por completo a existência do ser humano. Graças à primeira invenção, a da escrita, que possuímos hoje, uma massa de informações a respeito de um certo número de culturas já extintas (e a voz e/ou o pensamento, para sempre apagados, de alguns dos nossos predecessores) nos chegaram, pelas centenas ou de milhares de anos de história e de civilização. Quanto à segunda invenção, ela surgiu para permitir uma notação perfeitamente coerente de todos os números e para oferecer a qualquer um (mesmo aos espíritos mais fechados à aritmética) a possibilidade de efetuar qualquer tipo de cálculo sem a necessidade de se recorrer a acessórios como a mão, o contador mecânico ou a tábua de contar.

Assim como a escrita, o zero e nossos números modernos figuram, portanto, entre os mais poderosos instrumentos intelectuais de que dispõe o homem de hoje. Cálculos irrealizáveis durante milênios tornaram-se possíveis graças à sua descoberta, abrindo caminho para o desenvolvimento das matemáticas, das técnicas e de todas as outras ciências.

Todavia, esta descoberta fundamental não surgiu de uma só vez, ela teve uma origem e uma longa história, destacando-se pouco a pouco, após vários milênios de uma fantástica e enorme quantidade de tentativas e ensaios, de regressões e de revoluções.

Essa história começou há pouco mais de cinco mil anos em certas sociedades avançadas e, para outras, em plena expansão, onde foi preciso fixar operações econômicas excessivamente numerosas e variadas que precisavam ser confiadas apenas à memória humana. Para isso, estas sociedades passaram a representar os números por sinais gráficos: inventaram os algarismos. Espanta observar como, em suas buscas e tentativas, homens muito distantes no tempo e no espaço tomaram, às vezes, os mesmos caminhos e culminaram em resultados inteiramente semelhantes. Mas seria absurdo pensar que estes povos plagiaram uns aos outros; eles simplesmente foram colocados diante de condições iniciais rigorosamente idênticas. Apenas isso pode explicar o fato de sociedades, sem nenhum contato entre si, alcançarem, à mesma época, ou em épocas diferentes, a resultados tão análogos: domínio do fogo, descoberta dos números, progresso do urbanismo e da tecnologia, desenvolvimento da agricultura, tratamento e liga dos metais, invenção da roda ou arado etc.

Cálculos à sombra das pirâmides

Apesar do caráter muito rudimentar de sua numeração escrita, os egípcios, por volta do ano 2000 a.C., j faziam operações aritméticas por meio de seus algarismos.

Um impasse: os algarismos gregos e romanos

Como os sistemas egípcio, cretense ou asteca, a numeração grega escrita teve o inconveniente da simplicidade. Por menor que fosse a representação numérica, ela exigia uma repetição exagerada de signos iguais. Para o número 7.699, por exemplo, era preciso recorrer a trinta e um símbolos. Essas repetições cansativas que, indubitavelmente, explicam os múltiplos erros ou omissões cometidos pelos escribas e copistas da época, levaram os gregos a acrescentar algarismos suplementares à sua lista inicial. Como os signos da numeração grega, os algarismos romanos também não permitiam que seus usuários efetuassem cálculos, sendo úteis somente às tarefas de se *fazer abreviações para anotar e reter os números. Isso explica o porquê de* os contadores romanos sempre recorrerem a *ábacos* de *fichas* para a prática do cálculo.

Escrever mais depressa, simplificar a notação

No início, as numerações escritas foram muito primitivas. Baseadas em modelos concretos arcaicos, elas exigiam frequentemente repetições exageradas de símbolos idênticos. A numeração hieroglífica egípcia, por exemplo, repousava sobre o principio aditivo, atribuindo apenas algarismos particulares aos números: l, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000. E se contentava em repetir cada um desses algarismos tantas vezes quantas fossem necessárias. O desenho dos algarismos hieroglíficos era excessivamente minucioso para permitir uma transcrição simples e rápida dos números e, por esse motivo, os escribas egípcios procuraram simplificar ao máximo o grafismo e os algarismos originais. Criaram nove signos especiais para as unidades, nove outros para as dezenas, nove para as centenas e assim por diante. Os escribas israelitas e os matemáticos gregos sentiram a mesma necessidade, chegando a notações numéricas matematicamente equivalentes ao sistema hierático egípcio. Porém, em vez de procederem como os escribas egípcios, esquematizando progressivamente o traçado de seus algarismos iniciais, forjaram seu sistema a partir das letras consecutivas de seus respectivos alfabetos. Com o uso das letras alfabéticas, enquanto verdadeiros signos de numeração, deu-se origem, pouco a pouco, à possibilidade de se atribuir um valor numérico a cada palavra ou grupo de palavras, extraindo daí uma prática poético-místico-religiosa.

A numeração chinesa: a invenção do princípio multiplicativo

Os chineses, há mais de três mil anos, tiveram a ideia de recorrer a uma regra de numeração inteiramente diferente. Engendraram a numeração escrita, da qual se servem até hoje, fazendo uso de treze signos fundamentais, associados respectivamente aos números: l, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1.000 e 10.000. Os signos que representam esses números não constituemalgarismos propriamente, mas caracteres completamente ordinários da escrita chinesa. A escrita numérica chinesa utiliza-se do princípio aditivo e do princípio multiplicativo. Os números são sempre expressos da mesma forma, a partir dos treze caracteres fundamentais. Para os números de 11 a 19, é utilizado o signo da dezena e se coloca, sucessivamente, à sua direita, os algarismos das unidades correspondentes; a vintena é representada posicionando-se o número 2 à esquerda do signo da dezena; para os números de 21 a 29, procede-se do mesmo modo, posicionando-se, sucessivamente, à direita da representação do número 20, os algarismos das unidades correspondentes. Assim, os múltiplos de 10, 100, 1.000 e 10.000 são figurados segundo o princípio multiplicativo. As capacidades deste tipo de notação numérica ainda continuavam limitadas: quanto mais elevadas fossem as quantidades a serem expressas, mais símbolos originais precisariam ser criados ou mais novas convenções de escrita precisariam ser inventadas. Além disso. nem sempre era possível *calcular por escrito,* ainda era preciso lançar mão de recursos materiais como o contador mecânico ou a tábua de calcular.

Passo decisivo: a invenção do zero

Os babilônios, os chineses e os maias foram os primeiros povos a fazerem uso do princípio de posição.

Eles representavam qualquer número, por maior que fosse, por meio de uma quantidade bastante limitada de algarismos de base. Entretanto, nenhuma destas civilizações foi capaz de tirar proveito da descoberta fundamental. Os sábios da Babilônia inventaram este princípio no início do milênio V a.C. e o aplicaram rigorosamente à base sessenta durante quase dois mil anos, e nunca tiveram a ideia de associar um algarismo particular a cada uma das unidades significativas de seu sistema sexagesimal. No início da era cristã, os chineses descobriram, por sua vez, a regra de posição e a empregaram segundo uma base decimal.

Entre os séculos III e IV da nossa era, os maias refizeram a mesma descoberta, aplicando-a desta vez à base vinte. Dois desses três povos, os babilônios e os maias, inventaram em seguida o zero (servindo este signo particular para marcar a ausência das unidades de uma certa casa, absolutamente indispensável, quando se aplica rigorosamente a regra numeral precedente). O zero maia foi empregado no meio e no final das representações numéricas. Porém, em função da anomalia que os sacerdotes e astrônomos maias introduziram na terceira posição, adequando sua numeração à astronomia e ao calendário, o zero maia ficou privado de qualquer possibilidade operatória. Quanto ao zero babilônico, ele não somente desempenhou este papel como preencheu igualmente a função de um *operador aritmético* (o que significa que o acréscimo de um zero no final de uma representação por algarismos multiplicava o valor do número correspondente pela base sessenta). Mas ele nunca foi concebido como um número, isto é, como sinônimo da "quantidade nula". Foi em função destas imperfeições que os sistemas posicionais babilônico, chinês e maia mantiveram-se permanentemente impróprios para a prática das operações aritméticas, e que os dois zeros precedentes nunca puderam dar origem a desenvolvimentos matemáticos.

Índia, o berço da numeração moderna

Foi no norte da índia, por volta Do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno – o *cálculo escrito* tal como *se* pratica em nossos dias. Antes de chegar a este ponto, segundo inscrições desde o século III 2, C, os habitantes da índia setentrional usaram, por *longo* tempo, uma numeração escrita muito rudimentar; esta numeração comportava, entretanto, uma das características do nosso sistema moderno. Seus nove primeiros algarismos (os das unidades) eram, de fato, *signos*

independentes de qualquer intuição sensível - eram diferentes, arbitrários, pois não correspondiam visualmente aos números correspondentes e já constituíam antecipação dos nove algarismos significativos de hoje.
Porém, não se submetiam, ainda, à regra de posição decimal, esta numeração se assentava sobre o princípio de adição e atribuía um algarismo especial a cada um números. Semelhante a determinados sistemas do mundo antigo, esta numeração foi, em consequência, muito limitada.
Este sistema remoto não podia satisfazer às necessidades dos sábios hindus, em especial dos astrônomos que, desde a antiguidade tinham sido tomados pela loucura dos números grandes.

Como não podiam representar os números grandes por algarismos, desde muito, tiveram a ideia de expressá-los, como se diria atualmente, por extenso. Intuitivamente, eles iam na direção da descoberta do princípio de posição e do zero, pois este sistema já trazia no início essas duas descobertas fundamentais. De início , ela atribuía um nome particular a cada um dos nove primeiros números inteiros. Instituída sobre a base dez, ela atribuía, na sequência, *um nome* particular à dezena e a cada uma de suas potências além de nomes compostos a todos os outros números. Com a finalidade de abreviar, os matemáticos e astrônomos hindus, desta época, venceram uma etapa importante: suprimiram, no corpo dos números expressos deste modo, qualquer menção aos nomes indicadores da base e de suas diversas potências e, do enunciado de um número, conservaram somente a sucessão dos nomes das unidades correspondentes, respeitando, logicamente, a ordem de sua sequência regular e se conformando no sentido da leitura de acordo com as potências de 10. Para diferenciarem, por exemplo 31 de 301, criaram a palavra *sunya, que significava vazio.* Todos os ingredientes necessários à constituição da numeração moderna encontravam-se à disposição dos sábios da Índia: para as unidades de l a 9, eles dispunham realmente de algarismos distintos e independentes de qualquer intuição visual direta; eles já conheciam o princípio de posição; e acabavam de descobrir o zero. Foi a reunião destas três grandes ideias que produziu o milagre. A descoberta da regra de posição e do zero data, no máximo, do século V de nossa era. Os hindus não só inventaram o cálculo e a numeração moderna, como conseguiram tornar possível a democratização da arte do cálculo.

No ano de 628, o matemático e astrônomo *Brahmagupta* ensinou, numa obra o modo de efetuar simplesmente as seis operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação a potências e extração de raízes) relação ao que foi denominado os *bens,* as dívidas e o nada, ou seja, *os números positivos, negativos ou nulos dos tempos modernos.*

A álgebra moderna acabava de nascer e o sábio descobria uma de suas regras fundamentais: uma dívida subtraída do nada torna-se um bem e um bem subtraído do nada torna-se uma dívida (o oposto de um número positivo é negativo, e vice-versa).

A idade de ouro do Islã e as hesitações da Europa

Estas idades revolucionárias tiveram que aguardar mais de milênio para que fossem definitivamente aceitas pelo mundo ocidental. Felizmente, os árabes serviram de intermediários entre a Índia e o Ocidente. Eles tiveram um papel decisivo em todos os domínios da ciência e da cultura. Do século VIII ao século XIII, desenrolou-se um dos períodos mais notórios da história da ciência no mundo muçulmano. Nos países conquistados, foram recolhidas todas as obras gregas filosóficas, cientificas ou literárias, que foi possível encontrar. Todas foram traduzidas em língua árabe e cuidadosamente estudadas; Nesta época, as obras de síntese multiplicaram- se e se difundiram-se. Dentre os muitos matemáticos, a civilização arábico-islâmica, na época de sua idade de ouro, contou com *al-Knowarizmi*, sábio bastante célebre por duas obras que contribuíram amplamente para vulgarizar os métodos de cálculo e os procedimentos algébricos de procedência hindu, primeiro no mundo árabe e depois no Ocidente cristão.

Para além da perfeição

A história dos algarismos indica que a *inteligência universal e que o progresso assumiu um lugar no equipamento mental, cultural e co-letivo da humanidade.* Enquanto há mais de quatro mil línguas, (dentre as quais várias centenas são extensamente disseminadas), e várias dezenas de alfabetos e de sistemas de escrita para transcrevê-las, só existe, em nossos dias, um único sistema de numeração escrita. Em uma palavra, os *algarismos constituem, hoje, a única e verdadeira linguagem universal.*

10. LIMA, Elon Lajes et al. A matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 1999. v. 1, 2, 3 (Coleção do Professor de Matemática).

Resumo: A Matemática do Ensino Médio – Volume 1

Bruna Lammoglia

Silvio César Otero Garcia

Esse livro é o primeiro de uma coleção de 3 volumes. Tem como tema central as funções reais de uma variável real. Ele contém a matéria lecionada no primeiro dos três módulos do curso de aperfeiçoamento para professores de Matemática no IMPA. Os temas apresentados são abordados sob a ótica de que a matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelo para situações concretas.

O livro é dividido em 9 capítulos. São eles: *Conjuntos*, *Números Naturais*, *Números Cardinais*, *Números Reais*, *Funções Afins*, *Funções Quadráticas*, *Funções Polinomiais*, *Funções Exponenciais e Logarítmicas* e *Funções Trigonométricas*. A partir de agora será exposto um breve resumo de cada um deles.

Todos os capítulos possuem muitos exemplos e exercícios que não puderam ser contemplados neste resumo. Portanto, recomenda-se a leitura do texto na íntegra para um aprofundamento nos temas estudados.

1. Conjuntos

O capítulo começa com a noção de conjunto. É ressaltada a importância da linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, além de ser explicada a vantagem em ser utilizada. Essa vantagem diz respeito à álgebra que é montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$), interseção ($A \cap B$) e a relação de inclusão ($A \subset B$).

São feitas recomendações sobre o vocabulário, ao se falar sobre conjuntos em sala de aula. Também são feitas considerações a respeito do conjunto vazio Ø (não possui elementos) e do conjunto unitário (com um só elemento).

Sobre a relação de inclusão, para a qual se usa a notação $A \subset B$, que significa que A está contido em B, fala-se das inclusões extremas, ou seja, $A \subset A$ e $Ø \subset A$ e são mostradas as suas três propriedades:

1- Reflexividade: $A \subset A$;
2- Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$;
3- Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

É dito que a propriedade transitiva é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma chamada de silogismo.

São feitas recomendações a respeito de formas de se tratar a relação de inclusão e sobre a ligação dessa relação com a implicação lógica, utilizando-se o símbolo $\Rightarrow$, que significa "implica" e não "então". Fala-se que, na Matemática, todas as proposições são do tipo "se P então Q", em que P e Q são propriedades que definem conjuntos, e também que existem afirmações que são vacuamente satisfeitas: por exemplo, se um professor disser à sua classe que todos os alunos que tiverem 5 metros de altura passarão com nota 10 sem precisar prestar exames, ele estará certo já que o conjunto definido pela propriedade P é vazio.

Sobre o complementar de um conjunto é dito que dado um conjunto A e um subconjunto de U (conjunto Universo), chama-se complementar de A ao conjunto A^c formado pelos objetos de U que não pertencem a A. É realçado o *princípio do terceiro excluído*, em Lógica, que se refere ao fato de que, para todo $x \in U$, não existe outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$, e também o *princípio da não-contradição*, que se refere ao fato que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. São enunciadas e explicadas as seguintes regras operatórias que decorrem dos princípios citados acima:

1. Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$.
2. Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$, que pode ser escrita $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Essa última equivalência, se olhada do princípio lógico, usando-se as propriedades P e Q, que definem os conjuntos A (goza da propriedade P) e B (goza da propriedade Q), as propriedades que definem B^c e A^c são respectivamente, a negação de Q (Q') e a negação de P (P'). Portanto se tem a relação:

3. $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $Q' \Rightarrow P'$.

A implicação $Q' \Rightarrow P'$ é chamada de *contrapositiva* de $P \Rightarrow Q$, sendo muito útil em Matemática, além de ser a base das demonstrações por absurdo. São feitas recomendações no sentido de não confundir negação em matemática com a negação do senso comum. Por exemplo, a negação de “todo homem é mortal” é “existe pelo menos um homem não mortal” e não é “nenhum homem é mortal”.

Sobre *Reunião* e *Intersecção,* são dadas as definições: a reunião $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B e a interseção $A \cap B$ é o conjunto dos elementos que são ao mesmo tempo elementos de A e B. Essas operações constituem a contrapartida para os conectivos matemáticos “ou” e “e”. Assim, lembrando das propriedades P e Q, a propriedade que define o conjunto $A \cup B$ é “P ou Q” e o conjunto $A \cap B$ é definido pela propriedade “P e Q”.

As operações de reunião e intersecção são comutativas, associativas e cada uma delas é distributiva em relação à outra. Além disso, se A e B são subconjuntos do universo U, tem-se $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

É feito um comentário acerca da noção de igualdade. Se dissermos que a = b, significa que estamos usando símbolos diferentes para o mesmo objeto. Não confundir igualdade com congruência, em Geometria. A relação “a é igual a b” é reflexiva, simetria e transitiva.

O capítulo termina dizendo que a linguagem e a notação de conjuntos só se tornou universal a partir da terceira ou quarta década do século XX, e os trabalhos pioneiros foram de George Cantor no fim do século XIX. Traz também recomendações gerais para o professor, em sala de aula, quanto ao trabalho com conjuntos. É recomendado que os professores familiarizem seus alunos com os rudimentos da linguagem da notação de conjuntos, evitem pedantismos e exageros, procurem ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática, sejam cuidadosos para evitar cometer erros, tenham cuidado com a linguagem usada.

2. Números Naturais

O capítulo começa explicando que números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos, que permitem contar e medir; portanto, avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza. Porém, é dito que essa afirmação não representa uma definição matemática, pois faz uso de ideias e processos de significados não estabelecidos.

Discorre sobre o método axiomático, que faz uso de axiomas ou postulados (princípios ou regras que são tomados como verdade, sem demonstração). As proposições a serem demonstradas chamam-se teoremas e suas consequências imediatas são os corolários. Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamada lema. Na apresentação de uma teoria matemática, toda definição faz uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos, e assim sucessivamente.

Diz-se que, do ponto de vista do ensino médio, não se deve expor a Matemática sob forma axiomática. Recomenda-se que o professor nunca dê explicações falsas, não insista em detalhes formais para justificar afirmações intuitivamente óbvias. Porém, fatos importantes, cuja veracidade não é evidente (como o Teorema de Pitágoras), devem ser demonstrados.

Recomenda também que, embora a Matemática possa ser cultivada por si mesma, como um todo coerente, a importância social desta ciência é que ela oferece modelos para analisar situações da vida real, realçando que para poder empregar esses modelos é necessário verificar, em cada caso, que as hipóteses que lhe servem de base são satisfeitas.

Comenta-se sobre a evolução da humanidade até esta apoderar de um modelo abstrato de contagem, os *números naturais*, que veio através das necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo.

Hoje, o conjunto dos números naturais N é descrito concisamente por meio dos axiomas de Peano (limiar do século XX), que se seguem:

a) Todo número natural tem um único sucessor;
b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é $X \subset \mathrm{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathrm{N}$.

Podemos dizer que os números naturais são ordinais: 1 é o primeiro, 2 é o segundo etc. É dito que não devemos dar muita importância à questão se o 0 está ou não incluído nos números naturais. Diz-se que são aceitas as duas formas de pensamento são aceitas hoje em dia, mas que no livro, adota-se a versão na qual $\mathbb{N}$ começa no 1.

O último dos axiomas de Peano é conhecido como *axioma da indução*, que é base do método de demonstrações por indução, ou por recorrência. Esse método, enunciado sob a forma de propriedades, se formula da seguinte maneira:

Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) P(1) é valida;
ii) Para todo n $\in \mathbb{N}$, a validez de P(n) implica a validez de P(n+1).
Então P(n) é válida qualquer que seja o número natural n.

São definidas a adição e a multiplicação nos números naturais, por indução. A adição faz corresponder aos números n, p $\in \mathbb{N}$ a *soma* n + p e a *multiplicação* lhes associa o produto np.

Mostra as propriedades da relação de ordem m < n no conjunto dos números naturais, que são transitividade, tricotomia, monotonicidade e boa ordenação, esta última podendo substituir com vantagem a indução como método de prova de resultados referentes a números naturais.

3. Números Cardinais

O capítulo começa dizendo que para contar os elementos de um conjunto, é necessário usar a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção. Segue dando a definição de função:

Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X $\longrightarrow$ Y é uma regra que diz como associar a cada elemento x $\in$ X um elemento y = f(x) $\in$ Y. O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada x $\in$ X, o elemento f(x) $\in$ Y, chama-se *imagem* de x pela função f.

Alerta-se que não há sentido em perguntar “Qual o domínio da função f(x) = 1/x ?”, e que a pergunta correta seria “Qual é o maior subconjunto X $\subset \Re$ tal que a fórmula f(x) = 1/x define uma função f: X $\rightarrow \Re$?”

É dada a definição de função *injetiva* (f é injetiva quando x ≠ x’ em X $\Rightarrow$ f(x) ≠ f(x’)) e de função *sobrejetiva* (f é sobrejetiva quando, para qualquer elemento y $\in$ Y, pode-se encontrar pelo menos um elemento x $\in$ X tal que f(x) = y). Uma função chama-se uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca* entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. São mostrados exemplos de funções que satisfazem essas condições.

Diz-se que dois conjuntos X e Y têm o mesmo *número cardinal* quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca f: X $\rightarrow$Y. Por exemplo, sejam X = {1, 2, 3, 4, 5} e Y = {2, 4, 6, 8, 10}. Definindo f: X $\rightarrow$Y pela regra f(n) = 2n, temos uma correspondência biunívoca, onde f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8 e f(5) =10.

É dito que X é um *conjunto finito* ou que X tem n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca f: I_n $\rightarrow$X, onde I_n é o conjunto dos números naturais de 1 até n. O número natural n chama-se então *número cardinal* (indicaremos por n(X)) do conjunto X, ou simplesmente número de elementos de X.

Diz-se também que um conjunto X é infinito quando ele não é finito, o que quer dizer que X não é vazio e que, $\forall$n $\in \mathbb{N}$ não existe correspondência biunívoca f: I_n $\rightarrow$X.

O número cardinal n(X) goza de algumas propriedades básicas, dentre as quais está uma conhecida como o *princípio da casa dos pombos* (ou princípio da gaveta): se há mais pombos do que casas num pombal, qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles na mesma casa. Essa propriedade é enunciada da seguinte maneira: *Sejam X, Y conjuntos finitos. Se n(X) > n(Y), nenhuma função f: X* $\rightarrow$*Y é injetiva e nenhuma função g: Y* $\rightarrow$*X é sobrejetiva.*

Termina-se o capítulo esclarecendo que a maior contribuição de Cantor não foi a adoção da linguagem dos conjuntos, mas sim suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos. Ele descobriu que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades. Mostrou também que a reta, o plano e o espaço tri-dimensional (ou mesmo com dimensões superior a três) têm o mesmo número cardinal. É feita uma recomendação para não confundirmos conjunto infinito com aquele que possui uma quantidade muito grande de elementos.

4. Números Reais.

O capítulo começa mostrando de que modo o processo de medição de grandezas - ditas contínuas - conduz à noção de número real. É usada como protótipo a determinação do comprimento de um segmento de reta.

Para medir um segmento de reta AB, é necessário fixar um segmento padrão u, chamado de segmento unitário, com medida igual a 1. A medida do segmento AB será representada por $\overline{AB}$. Pode ocorrer que u não caiba um número exato de vezes em AB. Esta situação conduz à ideia de fração. Quando encontramos uma medida fracionária ou exata de um segmento, em relação a u, dizemos que ele é *comensurável*.

Até o quarto século antes de Cristo se pensava que dois segmentos quaisquer AB e CD eram comensuráveis, ou seja, existiria sempre um segmento EF que caberia um número exato n de vezes em AB e um número m de vezes em CD. Porém entre os discípulos de Pitágoras, alguém observou que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais e as frações não são suficientes para medir todos os segmentos de reta, introduzindo-se assim os *números irracionais*. No exemplo do quadrado, quando o lado do quadrado mede 1, a medida da diagonal é o número irracional $\sqrt{2}$. Incomensurabilidade, portanto, é uma relação entre duas grandezas da mesma espécie, não devendo ser confundida com a ideia de uma quantidade muito grande.

Mostra-se que podemos pensar nos números irracionais numa reta, para podermos situá-los em relação aos racionais. Essa reta é conhecida como a *reta real*, sendo definida por um ponto O (a origem) e um ponto A diferente de O.

Seja X um ponto qualquer da reta OA. Se OA couber um número exato n de vezes em OX, dizemos que a abscissa de X é um número natural n se estiver à direita de O ou um número negativo –n se estiver à esquerda. Assim, podemos definir o conjunto Z dos *números inteiros* como a reunião $\mathrm{Z} = \mathrm{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathrm{N}\}$.

O conjunto Q, dos *números racionais*, é formado pelas abscissas dos pontos X do eixo real tais que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA. Esses números são representados por frações m/n, onde m $\in \mathrm{Z}$ e n $\in \mathrm{N}$.

Se tomarmos um ponto X no eixo real de tal modo que os segmentos OX e OA sejam incomensuráveis, teremos um número x, que chamaremos de *número irracional*.

O conjunto $\Re$, cujos elementos são os números racionais e irracionais chama-se o conjunto dos *números reais*. Temos $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re$. As letras N, Q e $\Re$ são as iniciais das palavras natural, quociente e real. A letra Z é a inicial de *zahl*, que significa número em alemão.

Essa visão geométrica, por mais importante que seja, é complementada por uma descrição algébrica de $\Re$. Para isso é requerido que seja feita uma lista dos axiomas desse conjunto. A descrição mais simples de $\Re$ consiste em dizer que se trata de um *corpo ordenado completo*. Brevemente, $\Re$ é um *corpo* porque estão definidas nele as quatro operações: soma, subtração, multiplicação e divisão; *ordenado* porque existe a relação x < y e a *completeza* equivale à continuidade da reta.

Apresentam-se, também, as expressões decimais. As explicações são dadas para números reais positivos, sendo apenas necessário trocar o sinal quando se tratar de números negativos. Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma

$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ onde a_0 é um número inteiro positivo e a_1, a_2, ...,a_n são dígitos. Essa expressão determina o número real:

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \text{ (n = 1, 2, 3, ...).}$$

Diz-se, então, que o número real α é o limite desta sequência de números racionais. O fato de que existe sempre um número real, que é limite dessa sequência, é uma forma de dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo.

Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ chama-se uma *dízima periódica simples*, de período a_1, a_2, ...a_n, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Toda dízima periódica simples representa um número racional que se chama sua *fração geratriz*: *a geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período*. Por exemplo:

$$0,\ 521521521\ldots = \frac{521}{999}$$

Existem também as *dízimas periódicas compostas*, que são aquelas que, depois da vírgula, têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. Para encontrar a geratriz de uma dízima composta, seguimos a regra *a geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica*. Por exemplo:

$$0,\ 35172172\ldots = \frac{35172 - 35}{99900}$$

Assim, expressões decimais simples ou compostas representam números racionais. Reciprocamente, todo número racional é representado por uma expressão decimal finita ou periódica. A correspondência que associa a cada expressão decimal um número real é uma função sobrejetiva e “quase” injetiva. Isso porque se $0 \leq a_n \leq 8$ então as expressões decimais a_0, $a_1 \ldots a_n 999\ldots$ e a_0, $a_1 \ldots (a_n + 1)000\ldots$ definem o mesmo número real. Por exemplo, 3, 275999... = 3,276000....

Para obter uma correspondência biunívoca entre as expressões decimais e os números reais, basta descartar as que terminam por uma sequência de noves. Será feito isso de agora em diante.

Para realizar operações com expressões decimais, devemos aproximar as expressões infinitas para finitas.

George Cantor demonstrou que existem diferentes números cardinais infinitos. Mostrou que não pode existir uma correspondência biunívoca entre N e $\Re$. A cardinalidade de N é estritamente menor que a de $\Re$. Quando um conjunto é finito ou tem o mesmo número cardinal de N, diz-se que ele é enumerável. Assim $\Re$ é não enumerável. Cantor mostrou que o conjunto dos números racionais Q é enumerável e que o conjunto dos irracionais é não enumerável. Assim, conclui-se que existem mais irracionais que racionais!

A relação de desigualdade $x < y$ entre números reais é fundamental. Assim, são enunciadas as propriedades básicas dos números positivos, das quais resulta tudo o que se pode provar sobre desigualdades:

P1) Dado um número real x, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou x é positivo, ou $x = 0$ ou $-x$ é positivo.

P2) A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos.

As propriedades essenciais da relação $x < y$ são:

1. Tricotomia: dados $x, y \in \Re$ vale uma, e somente uma, das alternativas seguintes: $x < y$, $x = y$ o $y < x$.
2. Transitividade: se $x< y$ e $y < z$ então $x < z$.
3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \Re$ tem-se $x + z < y + z$
4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ e z é positivo então $xz < yz$.

Existem outras propriedades dos números reais que derivam de P1 e P2, que são: quanto maior for um número positivo, menor será seu inverso; todo quadrado, exceto 0, é positivo; quando se multiplicam os dois membros de uma desigualdade por um número negativo o sentido dessa desigualdade se inverte.

É lembrado que a afirmação $x < y$ pode ser interpretada geometricamente, numericamente e algebricamente.

Fala-se agora sobre *intervalos.* Sejam a, b números reais com $a \leq b$. São nove tipos de intervalos que são definidos, como subconjuntos de $\Re$.

- Intervalos limitados com extremos a, b: [a, b] é um intervalo fechado; (a, b) é aberto; [a, b) é fechado à esquerda, (a, b] é fechado à direita.
- Intervalos ilimitados: $(-\infty, b]$ é a semi-reta esquerda, fechada, de origem b. Os demais têm denominações análogas. São eles: $(-\infty, b)$; $[a, +\infty)$; $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty) = \Re$.

Quando a = b, o intervalo fechado [a, b] reduz-se a um único elemento e chama-se intervalo degenerado. Um fato particularmente relevante acerca dos intervalos é que *todo intervalo não-degenerado contém números racionais e irracionais*.

Em seguida, é mostrado que o *valor absoluto* de um número pode ser definido de várias maneiras. São elas:

- $|x| = \begin{cases} x \setminus x \geq 0 \\ -x \setminus x < 0 \end{cases}$
- |x| = max{x, -x}
- |x| = $\sqrt{x^2}$
- |x – y|, sendo aqui a interpretação de valor absoluto sendo feita como distância entre as coordenadas x, y dos pontos X, Y num eixo real E.

A interpretação como distância, no eixo real, permite enxergar intuitivamente o significado de algumas questões envolvendo módulo. Por exemplo, a igualdade |x – 2| = 3 significa que o número x está a uma distância 3 do número 2. Logo, deve ser x = 5 ou x = -1.

É dito que uma *sequência* de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto N e o contradomínio $\Re$. A notação usada é $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n,...) = (x_n)_{n \in \mathrm{N}} = (x_n)$. Uma sequência finita é uma função cujo domínio tem a forma I_n = {1, 2, ..., n}.

São descritos dois exemplos de sequências:

2- Progressões Aritméticas (PA), onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante chamada razão.
3- Progressões Geométricas (PG), onde cada termo, a partir do segundo é o produto do anterior por uma constante chamada razão.

5. Funções Afins

A partir deste capítulo o assunto do livro será funções reais de uma variável real, ou seja, funções f: X $\rightarrow \Re$ que tem como domínio um subconjunto X $\subset \Re$, e cujos valores f(x), para todo x $\in$ X, são números reais.

O capítulo trata de funções afins, porém faz uma revisão sobre produto cartesiano, gráfico de uma função, relação binária e o plano numérico $\Re^2$.

O *produto cartesiano* X x Y de dois conjuntos X e Y é o conjunto X x Y formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y, ou seja, X x Y = {(x, y); x $\in$ X, y $\in$ Y}.

O *gráfico* de uma função f: X $\rightarrow$ Y é o subconjunto G(f) do produto cartesiano X x Y formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e y = f(x). *Para que um subconjunto G $\subset$ X x Y seja o gráfico de uma função f: X $\rightarrow$ Y é* *necessário e suficiente que para cada x $\in$ X exista um, e somente um, y $\in$ Y tal que (x, y) $\in$ G.**

Uma *relação binária R* entre elementos do conjunto X e Y é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar se x está ou não relacionado com y segundo R. Em caso afirmativo escreve-se xRy. Um exemplo é a relação “menor do que” entre números reais, que escrevemos x < y.

Um exemplo particularmente importante de relação é a relação funcional, que ocorre quando temos uma função f: X $\rightarrow$ Y. Diz-se então que o elemento x $\in$ X está relacionado com o elemento y $\in$ Y quando y = f(x). Nesse caso não costumamos escrever xfy.

O gráfico de uma relação R entre os conjuntos X e Y é o subconjunto G(R) do produto cartesiano X x Y formado pelos pares (x, y) tais que xRy.

O autor considera adequado que no ensino médio utilize-se a seguinte terminologia para o gráfico de uma função: um subconjunto qualquer de X x Y é o gráfico de uma relação de X para Y. Se esse conjunto cumpre a condição * descrita acima ele é o gráfico de uma função.

O *plano numérico* $\Re^2$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano. Os elementos (x, y) de $\Re^2$ são pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas cartesianas do ponto P do plano Π (x = abscissa, y = ordenada), quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OU, que se intersectam no ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes. No primeiro quadrante, tem-se x ≥ 0 e y ≥ 0; no segundo x ≤ 0 e y ≥ 0; no terceiro, x ≤ 0 e y ≤ 0; no quarto, x ≥ 0 e y ≤ 0.

A partir de agora se olhará para $\Re^2$ como um plano, e chamarão seus elementos P = (x, y) de pontos e se procurará, com a ajuda dessa linguagem geométrica, alcançar um melhor entendimento das propriedades das funções reais a serem estudadas.

É mostrado como se chega à expressão que calcula a distância entre dois pontos P = (x, y) e Q = (u, v), em termos dessas coordenadas, que é obtida por meio do Teorema de Pitágoras: d(P, Q) = $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. Usando essa fórmula, podemos encontrar a equação de uma circunferência ou até mesmo reconhecer o gráfico da mesma.

Pensando geometricamente na condição *, temos que se X $\subset \Re$ é um conjunto situado no eixo horizontal, um subconjunto G $\subset \Re^2$ é o gráfico de uma função f: X$\rightarrow \Re$ se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical, traçada a partir de um ponto de X, intersecta G num único ponto.

Uma *função* f: $\Re \rightarrow \Re$ chama-se *afim* quando existem constantes a, b $\in$ $\Re$ tais que f(x) = ax + b, para todo x $\in \Re$. É possível determinar a e b mesmo quando eles não são dados explicitamente. O número b = f(0); e o número a, chamado de *taxa* *de variação (ou taxa de crescimento)* da função pode ser determinado conhecendo-se o valor da função em dois pontos x_1 e x_2, respectivamente $f(x_1)$ e $f(x_2)$ com a expressão a = $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Uma função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (o número a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando a = 0.

O gráfico G de uma função afim f: x $\rightarrow$ ax + b é uma linha reta. Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo OY. O número a chama-se inclinação, ou coeficiente angular, dessa reta em relação ao eixo horizontal OX. Na prática, sabendo que f: $\Re \rightarrow \Re$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, determinamos os coeficientes a e b resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \end{cases}$$

Pode-se demonstrar que toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim. Podemos também verificar que a equação da reta que passa pelo ponto (x, y) e tem inclinação a é $y = y_0 + a(x - x_0)$.

É feito um comentário sobre a utilização do nome coeficiente angular da função f, numa função afim. É dito que esse nome não é adequado para ser utilizado e sim o termo taxa de variação. Ou seja, temos a taxa de variação da função e o coeficiente angular de uma reta. Outro comentário diz respeito ao nome "função do primeiro grau" para uma função afim. Diz-se que somente polinômios possuem grau, e não funções.

Uma *função linear*, dada pela fórmula f(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Uma proporcionalidade é uma função f: $\Re \rightarrow \Re$ tal que, para quaisquer números reais c, x, tem-se f(cx) = cf(x) (proporcionalidade direta) ou f(cx) = f(x)/c, se c ≠ 0 (proporcionalidade inversa). Essa definição equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que y = ax para todo valor de x. Quanto à proporcionalidade inversa, só tem sentido quando se trata de grandezas não nulas, o que equivale a dizer que para todo x $\in \Re^*$, tem-se f(x) = a/x, onde a = f(1). A atenção será fixada na proporcionalidade direta, que será chamada de *proporcionalidade* a partir de agora.

Quando a correspondência x $\rightarrow$ y, x' $\rightarrow$ y' é uma proporcionalidade, a igualdade y'/x' = y/x permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três, o que consiste a tradicional "regra de três".

Para se determinar se uma função é ou não linear, podemos usar o teorema a seguir.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja f: $\Re \to \Re$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1- f(nx) = nf(x), para todo n $\in Z$ e todo x $\in \Re$.
2- Pondo a = f(1), tem-se f(x) = ax para todo x $\in \Re$.
3- f(x + y) = f(x) + f(y), para quaisquer x, y $\in \Re$.

Deve-se observar que a função f no teorema sendo crescente, tem-se a > 0. No caso de supor f decrescente, vale um resultado análogo, com a < 0. Outra hipótese possível para formular o teorema seria a de que a função é contínua.

A importância desse teorema reside em que, se queremos demonstrar que uma função é linear, basta verificar duas coisas:

1ª) f deve ser crescente ou decrescente.

2ª) f(nx) = nf(x), para todo n $\in Z$ e todo x $\in \Re$.

Para saber se, numa determinada situação, o modelo a ser adotado é uma função afim, usamos o seguinte teorema: *Seja f: $\Re \to \Re$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo f(x + h) – f(x) = φ(h) depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

A recíproca desse teorema é válida: Se f(x) = ax + b então f(x + h) – f(x) = ah não depende de x. A hipótese de que f(x + h) – f(x) não depende de x pode ser exprimida dizendo "a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para f(x)".

Existe uma *conexão entre funções afins e progressões aritméticas*. Se tivermos uma reta não vertical (gráfico de uma função afim) em $\Re^2$ e tomarmos sobre ela os pontos (1, y_1), (2, y_2),..., (i, y_i), ..., cujas abscissas são os números naturais 1, 2, ..., i, ..., as ordenadas y_1, y_2, ..., y_i, ... desses pontos formam uma progressão aritmética. Reciprocamente, se uma função monótona f: $\Re \to \Re$ transforma qualquer P.A. x_1, x_2, ..., x_i, ... numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_i = f(x_i)$, ..., então f é uma função afim.

É definida uma *função poligonal* como uma função f: $\Re \to \Re$ quando seu gráfico é uma linha poligonal. O protótipo de função poligonal é uma função f: $\Re \to \Re$, definida por f(x) = |x|, ou então f(x) = |x – c|, para algum c $\in \Re$. Pode-se demonstrar que toda função poligonal pode ser definida combinando valores absolutos de funções afins.

6. Funções Quadráticas

O assunto desse capítulo são as chamadas funções quadráticas. O autor as define como sendo funções $f:\Re\to\Re$ para as quais existem a,b,c, com $a\neq 0$ tais que $f(x)=ax^2+bx+c$. Em seguida, algumas observações interessantes são feitas. A primeira delas é que os coeficientes da função quadrática ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Desse modo, passa a ser possível fazer uma identificação entre uma função quadrática e um trinômio do segundo grau, isso é, a cada trinômio é possível corresponder uma função quadrática. Isso é, (trinômio) $\mapsto$ (função quadrática) é biunívoca. Apesar disso, para que duas funções quadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$ e $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ sejam iguais, não é necessário mostrar que $f(x)=g(x),\forall x\in\Re$, basta, no entanto, mostrar tal igualdade para três valores distintos de x. Assim, se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos, então essas funções são iguais. Isso é equivalente a dizer que uma parábola é determinada por apenas três pontos. Esses pontos, entretanto, não podem ser quaisquer, devem ser não-colineares. Esse fato é mostrado através da resolução de um sistema homogêneo.

O estudo das funções quadráticas, cuja origem está na resolução da equação do segundo grau, é bastante antigo. O autor discute brevemente esse ponto através do exemplo da determinação dos lados de um retângulo sendo conhecidos seu perímetro e sua área. Esses números procurados são as raízes da equação $x^2-sx+p=0$, onde s é o semi-perímetro do retângulo e p a sua área. Os babilônios, que já tratavam dessa questão, não utilizavam fórmulas para se determinar tais números, já que a representação através de letras dos coeficientes de uma equação só foi introduzida a partir de François Viète, no século 16. Até então, o que se tinha era uma espécie de receita que ensinava como proceder utilizando-se exemplos concretos. Em termos atuais, a receita dos babilônios fornece, para a equação $x^2-sx+p=0$, as raízes:

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p} \quad \text{e} \quad s-x=\frac{s}{2}-\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}$$

Embora os autores dos textos encontrados com tal regra não tenham registrado a maneira como chegaram a tal resultado, o livro nos apresenta um possível caminho.

A forma canônica do trinômio é o assunto abordado na sequência. O autor frisa a relevância da escrita de um trinômio sob sua forma canônica, uma vez que essa forma permite, por exemplo, que se deduza a fórmula para a resolução da equação do segundo grau. Além dessa, a forma canônica nos traz outras facilidades, como analisar os pontos de mínimo ou máximo da função do segundo grau ou responder à questão: dada a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, para quais valores $x\neq x'$ tem-se $f(x)=f(x')$? Outros pontos importantes sobre as funções do segundo grau como a existência de raízes reais, raízes duplas e raízes distintas são esmiuçados através da fórmula geral de resolução de equações do segundo grau. Ainda sobre esse assunto, o livro nos traz um exemplo que julgamos ser importante destacar. Nele é mostrado que o conhecimento sobre o ponto onde uma função quadrática assume seu valor máximo ou mínimo nos ajuda a responder questões como qual o valor máximo que o produto de dois números pode assumir sendo conhecida sua soma.

O gráfico da função quadrática é o assunto seguinte que é introduzido através de uma definição de parábola como o conjunto dos pontos plano equidistantes de uma reta e de um ponto fora dela. Através de exemplos que vão gradativamente do particular para o geral, o autor nos convence que o gráfico de uma função do segundo grau é, de fato, uma parábola. São trazidas algumas conclusões que resultam do exame desse gráfico, como, por exemplo, o ponto médio do segmento $[\alpha,\beta]$, onde α,β são abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo OX, será a abscissa do vértice da parábola.

O exame que se segue é do da determinação da congruência entre os gráficos de duas funções quadráticas. Após duas breves observações sobre translação horizontal e vertical de gráficos, o livro nos mostra que, através dessas transformações e de reflexões é possível sobrepor parábolas de funções quadráticas distintas. Entretanto, essas precisam ter certas características especiais. Se $a=\pm a'$, não importado os coeficientes b, b', c e c', então as parábolas das funções $f(x)=ax^2+bx+c$ e $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ serão congruentes, isso é, podem ser sobrepostas por translação e reflexão. Finalmente, a sessão que trata do gráfico de funções do segundo grau é finalizado com a apresentação da recíproca desse resultado, isso é, se os gráficos de duas funções quadráticas são congruentes, então $a=\pm a'$.

O capítulo segue com duas aplicações das funções quadráticas. A primeira delas diz respeito a propriedades das parábolas. Por que a reflexão de um raio de luz que incide paralelamente o eixo de uma superfície parabólica passa pelo foco? O autor, baseando-se no princípio físico de que o ângulo de reflexão de um raio deve ser igual ao ângulo de incidência, nos mostra, matematicamente, que tal fato é verdadeiro. Essa afirmação é sustentada pela seguinte afirmação, que é demonstrada no livro: *a tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.* Assim, uma vez demonstrado tal fato, um raio que incide paralelamente ao eixo principal de uma superfície parabólica, deverá ser refletido de modo que passe pelo seu foco. A segunda aplicação diz respeito ao movimento uniformemente variado. Conforme o próprio autor explica, a função quadrática é o modelo matemático que descreve esse tipo de movimento, são exemplos: queda de um objeto sujeito apenas a ação da gravidade e o movimento de um projétil (desprezada a ação da resistência do ar). Uma descrição razoavelmente detalhada desses movimentos, baseada nas propriedades das funções quadráticas, é apresentada.

O capítulo encerra-se com uma caracterização das funções quadráticas, que é a seguinte: *a fim de que a função contínua* $f:\Re \rightarrow \Re$ *seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada* $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$. Por progressão aritmética de segunda-ordem entende-se aquela cujas diferenças de seus termos formam uma progressão aritmética usual, isso é, uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $y_1, y_2, \cdots$ tal que as diferenças sucessivas $y_2 - y_1, y_3 - y_2, y_4 - y_3, \ldots$ formam uma progressão aritmética usual. Essa caracterização das funções quadráticas é semelhante a caracterização de função a fim feita no capítulo anterior.

7. Funções Polinomiais

De uma maneira parecida com a que foram tratadas, no capítulo anterior, as funções quadráticas, neste o autor fala das funções polinomiais. Uma função $p:\Re \rightarrow \Re$ é dita polinomial se existirem coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \Re$. O autor segue observando que o produto e a soma de funções polinomiais é também uma função polinomial. Disso, e do fato de $p(x) - p(\alpha)$, para um x qualquer e α fixado, gerar uma função polinomial divisível por $x - \alpha$, então é colocado que $p(x) = p(\alpha) + (x - \alpha)q(x)$, onde q(x) é uma função polinomial. Desse modo, considerando-se o caso particular onde $p(\alpha) = 0$, tem-se que α é uma raiz da função se, e somente se, p(x) é divisível por $x - \alpha$. O autor generaliza esse resultado para k raízes de um polinômio de grau n, que é aquele onde $a_n \neq 0$ e conclui que uma função polinomial de grau n não pode ter mais que n raízes. A definição de função polinomial identicamente nula é feita observando-se que não contradiz esse último resultado. Isso é, $p(x) = 0$ para todo $x \in \Re$, tendo, portanto, infinitas raízes. Entretanto, essa tal função não tem grau algum, já que nenhum de seus coeficientes é diferente de zero. O que se segue, ainda nessa primeira parte do capítulo, é a definição de igualdade entre funções polinomiais, duas funções polinomiais são iguais se, e somente se, assumem os mesmos valores para todo x real, bem como uma discussão, à moda da feita no capítulo anterior, sobre funções polinomiais e polinômios, sendo que a conclusão é a mesma: pode-se tratar esses dois entes matemáticos de forma indistinta, já que existe uma bijeção (polinômios) $\mapsto$ (funções polinomiais).

Da mesma forma que no capítulo anterior, esse segue com a determinação de um polinômio a partir de seus coeficientes. Um polinômio de grau n é determinado pelos seus n+1 coeficientes, isso é, dados n+1 números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e, fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau menor ou igual a n, tal que $p(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n$. A unicidade desse resultado segue imediatamente do fato de dois polinômios com coeficientes iguais serem iguais. Já a existência de um polinômio p de grau menor ou igual a n que assume valores pré-fixados em n+1 pontos distintos é provada pelo autor de duas formas distintas. Na primeira delas ele usa argumento semelhante ao do capítulo anterior, quando provou resultado análogo para funções quadráticas. A outra demonstração usa a fórmula de interpolação de Lagrange.

O capítulo é finalizado com observações sobre os gráficos das funções polinomiais. Se p(n) é um polinômio de grau n, então, para n par, p(n) assumirá o mesmo sinal do coeficiente a_n desde que se tome |x| suficientemente grande. Quando n é ímpar, p(n) assumirá mesmo sinal de a_n ou sinal contrário dependendo do sinal de x. Essa informação é útil para o traçado aproximado dos gráficos, assim como saber a localização de suas raízes. Se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então existe uma raiz entre x_1 e x_2. O método apresentado para se determinar uma raiz de um polinômio p localizada num intervalo [a,b], quando p(a) e p(b) tem sinais opostos, é o método de Newton.

8. Funções Exponenciais e Logarítmicas

O capítulo é iniciado com uma motivação: as funções a fim e as anteriormente estudadas não dão conta de modelos como o do rendimento de um montante de dinheiro aplicado a juros fixos ou o a desintegração radioativa. Funções que descrevem bem esses, e outros fenômenos, serão estudados nesse capítulo. Dada a motivação inicial, o que é feito em seguida é uma revisão das potências de expoente racional. Primeiramente são definidas as potências de base real e expoente natural e são mostradas suas propriedades. A definição indutiva para esse caso é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Dessa decorrem propriedades conhecidas como: para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$. Além disso, quando $a > 1$ temos que $a < a^2 < \ldots < a^n < \ldots$, e, quando $0 < a < 1$, $a > a^2 > \ldots > a^n > \ldots$ Pensando em termos de uma função, $f : \mathbb{N} \to \Re$ dada por $f(n) = a^n$ deve ser crescente para a>1 e decrescente para a<1. A extensão para $f : \mathbb{Z} \to \Re$ deve satisfazer $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, além disso, f deverá ser monótona crescente ou decrescente da base tomada. A fim de manter essas propriedades, coloca-se, em termos de base real e expoente inteiro: $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. A generalização dessa função para $f: Q \rightarrow \Re$ em termos de potências, traz: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$. Essa definição faz com que f satisfaça as propriedades conhecidas e desejadas. Entretanto, a demonstração é apresentada no livro “Logaritmos” da Coleção do Professor de Matemática. Essa breve retomada rumo a definição da função exponencial termina com a demonstração do seguinte lema: fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\Re^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in Q$.

A função exponencial $f: \Re \rightarrow \Re^+$, indicada por $f(x) = a^x$, é definida de maneira a gozar das propriedades já consideradas anteriormente para as funções de expoente natural, inteiro e racional. São elas:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
$a^1 = a$;
$x < y \Rightarrow a^x < a^y$, quando $a > 1$ e
$x < y \Rightarrow a^y < a^x$, quando $0 < a < 1$,

Consideradas tais propriedades, segue-se algumas consequências delas. Dentre elas: $f(x) \neq 0, \forall x \in \Re$, $f(x) > 0, \forall x \in \Re$, f é ilimitada superiormente, f é contínua, f é sobrejetiva. As duas primeiras consequências são válidas sempre que f não é identicamente nula e a última delas quando a base é diferente de 1.

A caracterização das funções exponenciais é feita em termos de dois teoremas, o da caracterização da função exponencial e o da caracterização das funções de tipo exponencial. O primeiro deles nos diz que se $f: \Re \rightarrow \Re^+$ é uma função monótona injetiva, então são equivalentes as seguintes afirmações:

1) $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in Z, x \in \Re$;
2) $f(x) = a^x, \forall x \in \Re$, onde a=f(1);
3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \Re$.

O segundo nos mostra que se essa mesma função é tal que, dados $x, h \in \Re$ quaisquer, o acréscimo relativo [f(x+h)-f(x)]/f(x) dependa apenas de h, mas não de x. Então, se b=f(0) e a=g(1)/g(0), tem-se g(x) = ba^x para todo $x \in \Re$. Ambos são demonstrados. Também, de modo análogo ao feito com as funções afins e quadráticas, o seguinte teorema é enunciado e demonstrado: seja $f: \Re \rightarrow \Re^+$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética em progressão geométrica. Se pusermos b=f(0) e a=f(1)/f(0) teremos f(x) = ba^x para todo x real.

A fim de definir a função logarítmica, inversa da função exponencial, o autor inicia definindo função inversa e trazendo algumas consequências. Uma função $g: Y \rightarrow X$ é a inversa de $f: X \rightarrow Y$ quando g(f(x)) =x e f(g(y)) = y, para todo x em X e y em Y. Desse modo, g é a inversa de f se, e somente se, f é a inversa de g. Da definição de inversa decorre imediatamente que se f admite inversa então deverá ser injetora e sobrejetora (do mesmo modo g, já que f é inversa de g). Em particular, se f for contínua e definida num intervalo, então só poderá ser injetiva se for monótona, em outras palavras, uma função contínua definida num intervalo possui inversa se for monótona (crescente ou decrescente) e sobrejetora e, além disso, sua inversa também será monótona. Se G' for o gráfico da função g, inversa da função f cujo gráfico é G, então G' será simétrico a G. Consequência desse fato é que se, numa folha de papel translúcido, traçarmos o gráfico de uma função, então ao girar a folha em 180° será possível visualizar o gráfico de sua inversa. Finalmente, então, a função inversa da exponencial é definida.

A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica $\log_a : \Re^+ \to \Re$ dada por: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Desse modo, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Algumas propriedades das funções logarítmicas são apresentadas:

1) Para quaisquer x,y positivos, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
2) A função $\log_a : \Re^+ \to \Re$ é crescente quando a>1 e decrescente quando a<1;
3) Para quaisquer x positivo, $\log_a x = \log_b x / \log_b a$.
4) $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

Já consideradas as restrições com relação a base.

A caracterização das funções logarítmicas se dá através do teorema que garante que essas são as únicas monótonas injetivas que têm a propriedade de transformar produtos em somas, ou seja, se $f : \Re^+ \to \Re$ é monótona injetiva tal que para todo x,y do domínio f(xy) = f(x).f(y), então existe a>0 tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \Re^+$.

A fim de introduzir o logaritmo natural, o autor define uma transformação geométrica $T_k : \Re^2 \to \Re^2$ que para cada real k>0 associa o ponto (x,y) do plano real ao ponto (kx, y/k). Desse modo, T transforma cada figura F do plano numa figura F' = T(F) de mesma área com dimensões alteradas pelo fator k na horizontal e 1/k na vertical. O interesse do autor reside no efeito da transformação T nas faixas de hipérbole. Chama-se faixa de hipérbole o conjunto H_a^b dos pontos (x,y) do plano tais que x está entre a e b e 0$\leq$y$\leq$1/x, onde a,b $\in \Re^+$ .Assim, tal faixa H_a^b é um conjunto limitado lateralmente pelas verticais x=a e x=b e verticalmente pelo eixo x e pela hipérbole. A transformação $T_k : \Re^2 \to \Re^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}. Convencionando áreas positivas e negativas, coloca-se: ÁREA H_a^b = área H_a^b > 0, se b>a, ÁREA H_a^b = -área H_a^b < 0 se a>b e ÁREA H_a^b =0 se b=a. Dito isso, definindo-se a função $f : \Re^+ \to \Re$ onde para cada número x>0, f(x) = ÁREA H_1^x, tem-se:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x>1;$$
$$f(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1;$$
$$f(1)=0;$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

Além disso, f será crescente. Consequentemente, pelo teorema da caracterização das funções logarítmicas, existirá um número real positivo, nesse caso chamado de e, tal que, para todo $x \in \Re^{+}$, $f(x)=\log_e x = \ln x$. Dessa definição, segue de forma imediata que f(e) = ÁREA $H_1^e = 1$. O autor encerra essa caracterização da função logarítmica de base e ressaltando sua importância em aplicações que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal e mostrando que a base e por ele definida coincide com a definição usual desse número, ou seja, $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Para introduzir o conceito de função exponencial de base e, o livro nos mostra um caminho: através da ideia de juros simples é possível se chegar a ideia de juros compostos. Imaginando-se um investimento com taxa anual α, investido um montante inicial c_0 nele, após um ano o capital obtido será $C=c_0(1+\alpha)$. Supondo ser possível retirar o montante do investimento e que o banco pagará a taxa proporcional, então, se ao longo de um ano forem feitas n retiradas e n reinvestimentos, ao fim de um ano o capital gerado será $C=c_0\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Supondo, ainda que n possa ser feito tão grande quanto se queira: $C=\lim_{n\to\infty} c_0\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 e^{\alpha}$. A importância de se escrever funções exponenciais na base e, sob a forma geral $f(x)=b\cdot e^{\alpha x}$ reside no fato de que a função nessa forma exibe explicitamente não apenas o seu valor f(0)=b como também o coeficiente α, o qual está ligado a taxa de crescimento da função. Esse último fato é justificado através do uso do conceito de derivada. Define-se a derivada de uma função f como sendo $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, usa-se a notação $f'(x)$ para indicar a derivada da função f. No caso particular de uma função do tipo e^x mostra-se que $(e^x)'=e^x$, ou, mais geralmente, $(e^{\alpha x})'=\alpha e^{x}$. Assim, a derivada da função $f(x)=e^{\alpha x}$ é proporcional ao valor f(x) da função f, sendo α o fator de proporcionalidade.

O capítulo termina apresentando um método para se determinar quando, dada uma função f, f(x+h)/f(x) depende exclusivamente de h. A implicação abaixo é o tal critério:

[illegible]

Toda função com essa característica será exponencial, nisso reside a importância do critério. Três exemplos do seu uso são colocados.

9. Funções Trigonométricas

O capítulo é iniciado com uma apresentação da importância das funções trigonométricas tanto para a matemática em si quanto para outras áreas. Após uma breve exposição da chamada trigonometria do triângulo retângulo, o autor passa a definir a chamada função de Euler. A função de Euler $E:\Re\rightarrow C$ faz corresponder a cada número real t o ponto E(t) = (x,y) da circunferência unitária de modo que o ponto $0\in\Re$ caia sobre o ponto (1,0) da circunferência. Essa função é imaginada como um processo de enrolar a reta sobre a circunferência C e traz algumas propriedades interessantes, como: $E(t+2k\pi)=E(t)$, para todo k inteiro e t real. Para cada t real, colocando B=E(t) define-se que o ângulo AÔB mede t radianos. O autor nos mostrará algumas observações sugeridas por essa definição, bem como fará uma correspondência entre as duas formas mais comuns de se medir ângulos: radianos e graus.

Finalmente, antes de definir as funções trigonométricas de variável real, por meio da visualização de figuras, são mostradas relações que traduzem propriedades das funções seno e cosseno: E(t + π) = (-x,-y), E(t + π/2) = (-y,x), E(-t)=(x,-y), E(π/2 – t) = (y,z) e E(π – t) = (-x,y). As funções trigonométricas $\cos:\Re\rightarrow\Re$ e $sen:\Re\rightarrow\Re$ são então definidas pondo-se, para cada t real: E(t) = (cos t, sen t). Desse modo, resultados convenientes das funções seno e cosseno são respeitados com essa definição, dentre eles a relação fundamental $sen^2t+\cos^2t=1$ e, das quatro relações da função de Euler, as seguintes:

$$\cos(t+\pi)=-\cos t \quad sen(t+\pi)=-sen\,t$$
$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\,t \quad sen\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=sen\,t \quad sen\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$$
$$\cos(\pi-t)=-\cos t \quad sen(\pi-t)=sen\,t$$

A partir das funções seno e cosseno são definidas ainda as funções tangente, secante, cossecante e cotangente.

As fórmulas de adição de arcos

são demonstradas, bem como suas consequências diretas, que são as fórmulas de arco duplo. São mostradas duas aplicações dessas fórmulas: a determinação das coordenadas de um ponto A'=(x',y') obtido de A=(x,y) por meio de rotação em torno da origem e a demonstração de que o cos(a) e sen(a) se exprimem como funções racionais de tg(a/2).

O autor finaliza o capítulo deduzindo as conhecidas lei dos senos e lei dos cossenos e apresentando problemas de determinação dos lados e ângulos de um triângulo em diferentes casos.

Volume 2

Elaborado por: Gisele Romano Paez

Apresentação

Os três volumes da obra intitulada “A Matemática do Ensino Médio” fazem parte da coleção de livros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Essa coleção está inserida nas obras destinadas ao professor de Matemática. Formado por doze capítulos, o segundo volume da coleção traz alguns conteúdos, os quais são ensinados no Ensino Médio do Brasil. Dentre eles estão: progressões, matemática financeira, recorrência, combinatória, probabilidade, médias e o princípio das gavetas, pontos, retas e planos, perpendicularismo, medindo distâncias e ângulos, poliedros, volumes e áreas, superfícies e sólidos de revolução.

O livro está dividido em dois temas centrais: o estudo da matemática discreta e a introdução à geometria espacial. Os cinco primeiros capítulos englobam o primeiro tema, e foi escrito pelo professor Augusto César Morgado, e os demais capítulos correspondem ao segundo tema escritos por Paulo César Pinto Carvalho e Eduardo Wagner, todos professores e pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Rio de Janeiro e idealizadores deste trabalho juntamente com o professor Elon Lages Lima. Este trabalho também se insere em um projeto do IMPA chamado “Programa de aperfeiçoamento para professores do Ensino Médio”, “que em sendo realizado pelo IMPA desde 1996, com apoio da CAPES e da FAPERJ” (LIMA *et al*., 1999, Prefácio).

Os autores buscam evitar o uso excessivo de fórmulas e propõem o uso consciente das definições e princípios fundamentais em exercícios, os quais trazem objetos do mundo real que ilustrem conceitos importantes.

Aqui se encontra um resumo dos doze capítulos do segundo volume. Apontando as principais definições necessárias para a compreensão dos conteúdos de cada capítulo. Dividiremos esse resumo com a numeração dos capítulos e das seções do livro. As definições são tiradas do livro na íntegra.

Capítulo 1: Progressões

4- Progressões Aritméticas

A definição de progressão aritmética aparece como: "Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra **r**". (p. 1)

Cada termo de uma progressão aritmética pode ser representado por $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, onde a_1 é o primeiro termo da sequência, a_2 o segundo termo e assim por diante. "De modo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois ao passar de a_1 para a_n, avançamos $(n-1)$ termos". (p. 2)

Em alguns exemplos o autor traz definições e caracterizações de alguns tipos de progressões. "Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1)r = rn + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionário, esse polinômio é de grau menor que 1". (p. 4) E defini ainda que "[...] progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem". (p. 4)

O autor considera que "muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir de zero [...]". (p. 3), para que assim uma progressão aritmética $a_n = a_0 + nr$ possa representar uma função afim $a(x) = a(0) + rx$ "[...] uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequencia de pontos colineares no plano." (p. 5)

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

O autor traz a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e em seguida sua prova. Posteriormente traz as variações desta fórmula conforme indicado a seguir:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$. (p.6,7)

Ainda com a ideia de que uma progressão pode ser representada por um polinômio, o autor sugere que observemos o seguinte: "[...] se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente. A recíproca é verdadeira, ou seja, "[...] todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética." (p. 7)

O autor define um operador diferença Δ para uma sequência como $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. E conclui que essa sequência (a_n) será "[...] uma progressão aritmética se e somente se $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é constante". (p. 7)

Assim, fazendo relações entre a sequencia (a_n) e a sequencia (Δa_n) o autor define uma progressão aritmética de segunda ordem como "[...] uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária". [5] (p. 7)

Aqui o autor generaliza para progressões de ordem k e traz, na sequência, dois teoremas e um corolário com suas respectivas provas[6]. "De modo geral, uma progressão aritmética de ordem $k (k > 2)$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$". (p. 8)

<u>Teorema1:</u> $1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. (p. 11)

<u>Corolário:</u> Se F é um polinômio de grau p então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. (p. 12)

---

5 Ver exemplos 15 e 16 da p. 8

6 Ver provas dos teoremas nas p. 11 e 12 e do corolário no exemplo 20 da p.12

Teorema 2: (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p $(p \geq 2)$, se e somente se a_n é um polinômio de grau p em n. (p. 12)

5- Progressões Geométricas

Para introduzir o tema de progressões geométricas, o autor lança vários exemplos que considera interessantes e intrigantes para os alunos[7]. Só depois disso, define a progressão geométrica: "[...] uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte". (p. 26)

E traz ainda que "Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. [...] de modo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos". (p. 26)

E que "Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero, nesse caso, $a_n = a_o q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n". (p. 26)

O autor também relaciona progressão geométrica com função, só que agora, exponencial. "[...] pensamos em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada numero natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial". (p. 26)

Fórmula das taxas equivalentes

"Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1+I=(1+i)^n$". [8] (p. 27)

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

O livro também traz a formula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e suas variações chegando a definir um limite finito para esta soma. "A soma dos

---

7 Ver exemplos do 1 ao 6 das p. 23,24 e 25

8 A prova desta fórmula está na p.27

n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. (p. 28) [...] Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$". (p. 29)

Em seguida e finalizando o tema, o autor apresenta o teorema fundamental da somação: $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$, que "[...] também nos permitiria determinar o valor da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica". [9] (p. 30)

6- Sobre o Ensino de Progressões

Neste subitem o autor faz algumas sugestões para os professores quanto ao desenvolvimento do ensino de progressões. Algumas delas como:

> O ensino de casos particulares; que "em uma progressão aritmética a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos"; que "em uma progressão geométrica cada termo é a média geométrica entre seu antecedente e seu consequente"; que o termo central de uma progressão aritmética com número ímpar de termos é a média aritmética dos extremos e que em uma progressão geométrica com número impar de termos é a média geométrica dos extremos; que "em uma progressão geométrica, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos"; (p. 40)
>
> Que só o conhecimento das fórmulas dos termos gerais não bastam, é necessário saber o princípio de formação de cada progressão para, aí sim, se chegar à fórmula;
>
> Não ficar mostrando todas as variações de uma fórmula; que "não há o menor interesse, prático ou teórico, em determinar o produto dos termos de uma progressão geométrica"; (p. 41)
>
> Moderação no tipo de problema proposto pensando sempre "se meu professor de Matemática tivesse feito estes problemas, eu teria gostado de Matemática?"; (p. 41)
>
> Relacionar progressões geométricas com taxas de crescimento;
>
> Escrever todos os termos de uma progressão com número pequenos de termos esquecendo as fórmulas; não há vantagens em "chamar três números em

---

9 A prova deste teorema esta no exemplo 6 da p.30

progressão geométrica de $\frac{x}{q}, x, xq$ em vez de chamá-los de x, xq, xq^2 [...] que só servirão "[...] para criar desnecessariamente denominadores e complicar as contas"; (p. 42)

Na vida real é indispensável o uso de calculadoras na resolução dos problemas de progressões geométricas;

Não deve haver dificuldades em ensinar o limite da somas dos termos de uma progressão geométrica se você já ensinou funções exponenciais e logaritmos, pois, ao fazer os gráficos dessas funções já deve ter sido comentado "[...] quais os limites de a^x quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$", caso contrário são sugeridos dois exemplos[10]. (p. 43)

Capítulo 2: Matemática Financeira

O autor começa o capítulo afirmando que a matemática financeira é uma importante aplicação de progressões geométricas e que a operação básica é o empréstimo. Para fazer essa operação define alguns elementos presentes nela: capital C (chamado de principal) disposto por alguém, que o empresta a outrem por um período de tempo. Passado este período, o capital C é devolvido acrescido de uma remuneração J (juros). O montante M é a soma de C com J. A razão $i = \frac{J}{C}$ é a taxa de crescimento do capital no referido período da operação (taxa de juros).

Na sequência são apresentados dois exemplos. O segundo exemplo é de uma situação de juros compostos usado para defini-lo. O autor considera que "[...] no regime de *juros compostos*, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período" (p. 45).

Em seguida, aparece o Teorema 1: "No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$". [11] (p. 45) O autor sugere outra maneira de ler o teorema 1: "[...] uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia

[10] O autor sugere os exemplos 14 e 15 da p.29 para se introduzir a noção de limite na soma dos termos de uma progressão geométrica

[11] Ver a prova do teorema na p. 45

igual a $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F=A(1+i)^n$". (p. 45) Essa fórmula é fundamental na equivalência de capitais: "*Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por* $(1+i)^n$. *Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por* $(1+i)^n$". (p. 46)

Após vários exemplos, o autor retoma a **fórmula das taxas equivalentes** do capítulo anterior, segundo item. "Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente à n períodos de tempo é I tal que $1+I=(1+i)^n$". (p. 49) O exemplo 9 que vai despertar o leitor para o fato de que "taxas proporcionais não são taxas equivalentes" (p. 50), pois, se, por exemplo, uma "taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês", será equivalente a 290% ao ano e não 144% ao ano que será a taxa proporcional a 12% ao mês, "[...], pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem". (p. 49) "A taxa de 144% ao ano é chamada de taxa nominal e a taxa de 290% ao ano é chamada de taxa efetiva". (p. 50).

O teorema 2 nos mostra o valor de uma série uniforme, sendo que série, ou anuidade, ou renda é "um conjunto de quantias [...] referidas a épocas diversas [...]" (p. 50) Então, pelo teorema 2 temos que "o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A=P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$". [12] (p. 51)

A seguir, temos um corolário que trata do valor de uma renda perpétua, que se refere a locações. "o valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $\frac{P}{i}$". (p. 50)

A próxima definição que aparece é a desconto. Desconto é "a diferença $F-A$" (p. 54), onde F é uma face da promissória (quantia paga ao banco por um empréstimo tomado, certamente maior que o empréstimo) e A é a quantia emprestada ao cliente pelo banco. O desconto efetuado pelo banco é calculado pela fórmula $A=F(1-dt)$, sendo que d é uma taxa fixada pelo banco (taxa de desconto bancário ou desconto simples por fora) e t é o prazo da operação, o tempo correspondente na taxa.

---

12 Ver a prova do teorema na p.51

O pagamento parcelado de um débito quita parte dos juros e parte da dívida (amortiza a dívida). “Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização, também chamado de Tabela Price. [...] O sistema francês é caracterizado por prestações constantes.” (p. 55)

O cálculo da amortização no sistema SAC é determinado no teorema 3: “No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos $A_k = \frac{D_0}{n}$, $D_k = \frac{n-k}{n}D_0$, $J_k = iD_{k-1}$, $P_k = A_k + J_k$, sendo D a dívida, J os juros e amortização do empréstimo e P é a prestação [13].

O teorema 4 traz o cálculo da amortização no sistema francês: “no sistema francês de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos $P_k = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, $D_k = D_0\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$, $J_k = iD_{k-1}$, $A_k = P_k - J_k$”, (p. 57) onde os elementos são os mesmos do teorema anterior [14].

Finalizando o capítulo o autor explica que em algumas situações os juros são calculados sobre o valor inicial e não sobre o montante. Esse tipo de juros são os juros simples que considerando $C_n = C_0 + niC_0$ forma uma progressão aritmética.

Capítulo 3: Recorrência

3.1 Sequência Definidas Recursivamente

O autor define sequências por recorrência, aquela sequência em que cada termo pode ser calculado “em função do(s) antecessor(es) imediato(s)” (p. 65) por uma determinada regra. “Uma recorrência, por si só, não define a sequência, [...] é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s)”. (p. 65) Recorrências de primeira ordem são aquelas “[...] nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato [...]” (p. 66) e recorrência de segunda ordem é aquela “[...] na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos” (p. 66), por exemplo a sequência de Fibonacci.

3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

---

13 Ver a prova do teorema na p.56 e o exemplo 21

14 Ver a prova do teorema na p.57

Agora, o autor irá caracterizar cada um dos tipos de recorrências. Começando pela recorrência de primeira ordem expressa por x_{n+1} em função de x_n, que será "linear se e somente se essa função for do primeiro grau". (p. 68). Recorrências lineares que não possuem termo independente de x_n são ditas homogêneas [15].

O teorema 1 vai mostrar que "qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$" (p. 70) que são mais fáceis de serem resolvidas.

"Teorema 1. se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$". (p. 71)

3.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Primeiramente o autor vai tratar das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com $q \neq 0$. "A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada equação característica". (p. 74) Como $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica. O teorema 1 vem mostrar que se r_1 e r_2 são as raízes da equação característica "[...] então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2" [16]. (p. 74) Já o teorema 2 mostra que se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ [17]. O teorema 3 mostra a solução da recorrência caso as raízes da equação característica sejam iguais. Neste caso teremos $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ como solução da recorrência. [18] O teorema 4 continua a mostrar a solução de uma recorrência que tem raízes iguais para a equação característica. Ele mostra que a solução será $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$. [19] Se as raízes da equação característica forem complexas a solução pode ser escrita na forma trigonométrica evitando cálculos com complexos:

---

15 Observar exemplos 2 e 3 da p.69

16 Ver teorema e prova na p.74

17 Ver teorema e prova na p.75

18 Ver teorema e prova na p.77

19 Ver teorema e prova na p.78

[illegible]. [20] O último teorema dessa secção mostra um processo para resolver algumas recorrências não-homogêneas. "Teorema 5. Se a_n é uma solução da equação $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = f(n)$ então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0$". (p. 79) Pode-se perceber que a solução desse tipo de recorrência é composta por duas partes: uma solução homogênea e outra não-homogênea que será encontrada por tentativa. [21]

Capitulo 4: Combinatória

4.1 Princípios Básicos

O autor explica que "o princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy". (p. 85)

O autor indica três estratégias para se resolver problemas de combinatória: a postura, que é se colocar no papel da pessoa que fará a ação solicitada e ver que decisão tomar; divisão, que consiste em "[...] dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples [...]" (p.86); o não adiamento das dificuldades, ou seja, se há alguma decisão mais restritiva, ela deve ser tomada em primeiro lugar.

4.2 Permutações e Combinações

Alguns problemas mais frequentes em combinatória podem ser resolvidos por *permutações simples* que é cada ordem dada aos objetos do problema. "O número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$". (p. 94) Se houver repetição de elementos, então a permutação é $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$, onde α, β, γ são a quantidade de vezes de repetição dos objetos.

Outros problemas, também frequentes em combinatória podem ser resolvidos por combinações simples que é cada seleção p que podemos fazer dos n objetos. O número de

---

[20] Ver exemplo 5 da p.77

[21] Ver exemplos 7 e 8 das p. 79 e 80 respectivamente

combinações simples é representado por C_n^p ou $\binom{n}{p}$. “Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não-selecionados”. (p. 96). Assim temos que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

4.3 O Triângulo Aritmético

A **relação de Stifel** permite construir rapidamente o triângulo de Tartaglia – Pascal. Essa relação “[...] diz que somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado embaixo do da direita.” (p. 108) Assim no triângulo

$$\begin{array}{lll} C_0^0 & \qquad & 1 \\ C_1^0\ C_1^1 & & 1\ 1 \\ C_2^0\ C_2^1\ C_2^2 & & 1\ 2\ 1 \end{array}$$

o elemento C_2^1 é obtido pela soma dos elementos C_1^0 e C_1^1, ou seja 1+1.[22]

Outro teorema importante é o **teorema das linhas** no qual $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Há ainda, a **relação das combinações complementares**, onde $C_n^p = C_n^{n-p}$.

4.4 O Binômio de Newton

“A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de $(x+a)^n$”, (p. 109) ou seja, $(x+a)(x+a)\dots(x+a)$. Genericamente temos $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p}$.

4.5 Sobre o Ensino de Combinatória

Aqui os autores dão dicas de como proceder para se ensinar combinatória.

4- Não particularizar demais nem usar muitas fórmulas;
5- Analisar as respostas erradas;

---

22 Ver relação de Stifel e sua prova na p. 108

6- Buscar métodos que solucionem vários problemas e não truques que resolvam problemas particulares;
7- Usar raciocínios construtivos;
8- Não comece tentando identificar o tipo do problema.

Capítulo 5: Probabilidade

5.1 Conceitos Básicos

O capítulo se inicia com as definições de experiências aleatórias, que são "experiências que, repetidas sob as mesmas condições, produzem geralmente resultados diferentes" (p. 113) e *espaço amostral* S que é "o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória". (p.113) S será considerado sempre finito ou infinito enumerável. *Eventos* são subconjuntos de S. O número associado a cada evento é a probabilidade do evento que traduz a confiança na ocorrência do evento. Probabilidade é, então, definida como "uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que: i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$; ii) $P(S) = 1$; iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $(A \cap B = \phi)$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$". (p. 114). Para o cálculo da probabilidade temos que "a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis" (p. 115) ou ainda, "o número de vezes que o evento A ocorreu dividido pelo número total de repetições da experiência". (p. 116).

O teorema 1 traz as propriedades das probabilidades [23]. Entre elas podemos destacar duas: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

5.2 Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional é aquela de um evento B ocorrer sendo que ocorreu um evento A, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento B depende de um evento prévio que restringirá, o espaço amostral do evento B. A definição da página 124 será mais útil para a determinação da probabilidade da intersecção de dois eventos. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

[23] Ver p. 116

Capítulo 6: Médias e o Princípio das Gavetas

6.1 Médias

As médias são definidas como: “em uma lista de números, a média é o valor que substitui todos os elementos desta lista sem alterar certa característica desta lista.” Se a característica da lista for a soma dos elementos temos a *média aritmética* $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; se for o produto dos elementos temos a *média geométrica* $g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$, para n números positivos; se for a soma dos inversos dos elementos temos a média harmônica $h=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ para n números positivos. [24]

Outra média definida pelos autores é a *média quadrática* que “[...] é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números”. (p. 141)

O Princípio das gavetas diz que “se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto”. [25] (p.143)

Finalizando este item os autores definem *média ponderada* como $\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$, onde $x_1,x_2,\ldots x_n$ são os números que se quer a média e $p_1,p_2,\ldots p_n$ são os pesos (quantidade de repetições) respectivos dos números.

6.2 A Desigualdade das Médias

Neste item os autores relacionam as médias aritméticas e geométricas. “A desigualdade das médias afirma que a média aritmética de n números positivos é maior que ou igual à sua média geométrica e só é igual se os números forem todos iguais”. [26] (p. 153)

6.3 Desigualdade das Médias Generalizada

Aqui são comparados todos os tipos de médias definidas anteriormente. “Se $x_1,x_2,\ldots x_n$ são números positivos e Q, A, G e H são suas médias quadrática, aritmética,

---

[24] Ver exemplos 1, 2 e 3 das p. 139 e 140.
[25] Ver prova na p. 143
[26] Ver prova na p. 153

geométrica e harmônica, respectivamente, então $Q \geq A \geq G \geq H$. Além disso, duas quaisquer dessas médias são iguais se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$". (p. 156)

Capítulo 7: Pontos, Retas e Planos

7.1 Do Plano para o Espaço

Neste primeiro item, os autores argumentam sobre as dificuldades de ensinar e aprender geometria espacial. Eles afirmam que, apesar de o mundo ser tridimensional, os alunos demoram para perceber as formas tridimensionais e as relações entre as figuras são mais complexas. Nem sempre os modelos bastam na interpretação das relações das formas. Ter imaginação, bom conhecimento das propriedades fundamentais e uso dos conhecimentos em geometria plana ajudam na dedução das relações entre as figuras. Uma maneira de apresentar os conceitos fundamentais da geometria espacial é o uso de uma formulação axiomática, ou seja, "[...] um certo conjunto de noções primitivas não definidas e de um conjunto de axiomas ou postulados, que são propriedades aceitas como verdadeiras. As demais propriedades (os teoremas) são demonstrados a partir destes postulados". (p. 163) Os postulados devem ser suficientes e consistentes e sempre que possível, reflitam fatos que correspondam a nossa intuição. [27]

7.2 Noções Primitivas e Axiomas

Os autores acreditam não ser apropriado apresentar uma teoria axiomática formal para os alunos desta série. Porém, é importante que os alunos saibam que não somente a geometria se baseia em noções não definidas e não demonstráveis, e que as noções primitivas de ponto, reta e plano podem ser reforçadas pelas intuídas pelos alunos.

O subitem segue enunciando os postulados clássicos da geometria espacial: "dados dois pontos distintos do espaço existe uma, e somente uma, reta que os contém; dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém; se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano". (p. 165) e um teorema

---

[27] Os autores sugerem os livros "Introdução à Geometria Espacial" de Paulo C.P. Carvalho, da Coleção do Professor de Matemática da SBM e "Geometria Euclidiana Plana", de João Lucas Marques Barbosa, da mesma coleção, para uma discussão mais completa sobre os fundamentos da geometria espacial e plana, respectivamente.

que recorre a esses postulados: “existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela”. (p. 165) [28]

7.3 Posição de Retas

Algumas perguntas só poderão ser respondidas com a introdução de novos postulados ao invés da utilização de propriedades já prontas, com isso os alunos são levados a descobrir tais propriedades.

Para responder “como pode ser a interseção de duas retas e quando duas retas determinam um plano” (p. 166) usaremos o postulado que “*duas retas distintas podem ter no máximo um ponto comum*” (p. 166). “Quando duas retas têm exatamente um ponto comum, elas são chamadas de *concorrentes* e *sempre determinam um plano*”. (p. 166) Agora, “quando duas retas não possuem ponto em comum, elas podem ou não determinar um plano” [29]. (p. 167)

Caso não exista nenhum plano que contenha duas retas distintas, essas retas são chamadas de retas *não-coplanares* ou *reversas*. Esses tipos de retas possuem interseção vazia. Contudo, duas retas no espaço podem ter interseção vazia e serem coplanares. É o caso das retas *paralelas*, pois sabemos que “*por um ponto* P *exterior a uma reta* r *do espaço passa uma única reta* s *paralela a ela”* [30]. (p. 168)

7.4 Posição Relativa de Reta e Plano

A reta pode estar *contida* no plano, caso possua dois ou mais pontos pertencentes ao plano, ou *secante* ao plano, caso possua apenas um ponto comum ao plano, ou ainda, *paralela* ou plano, caso não possua pontos comuns ao plano. [31]

7.5 Posição Relativa de dois Planos

Dois planos distintos são *secantes* se possuem mais de um ponto em comum, sua interseção será uma reta. [32]

---

28 Ver prova na p. 165
29 Ver figuras 7.3 e 7.4 da p. 167
30 Ver p.168
31 Ver p.169
32 Ver figura 7.9 da p. 171

Dois planos distintos jamais terão apenas um ponto em comum, pois pelo postulado 4: "se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum". (p. 171)

Dois planos distintos podem ser ainda paralelos. [33]

7.6 Construindo Sólidos

Construção de Pirâmides e Cones

Tomam-se pontos formando um polígono num plano e um ponto fora do plano. Cada dois vértices consecutivos do polígono com o ponto fora do plano formam um triângulo. Esses triângulos juntamente com o polígono formam uma região no espaço denominada de *pirâmide* de base do polígono. [34] Para se construir um *cone* a base não será um polígono, mas sim "qualquer região plana delimitada por uma curva fechada simples [...]". (p. 174)

Construção de Prismas e Cilindros

Para a construção de prismas precisamos de um polígono em um plano, um ponto fora deste plano. Por este ponto traçamos um plano paralelo ao plano anterior. Traçamos uma reta que liga um dos pontos do polígono com o ponto pelo qual traçamos o plano paralelo. Traçamos retas paralelas a esta e entre si, formando, assim, quadriláteros constituídos por dois segmentos consecutivos e paralelos e dois segmentos contidos nos planos paralelos. Esses quadriláteros mais os dois polígonos formam um poliedro chamado *prisma*. [35]

7.7 Descobrindo Relações de Paralelismo

Aqui os autores apresentam uma lista de situações em que alguns paralelismos podem ser deduzidos por outros paralelismos, como por exemplo: "uma reta é paralela a um plano se e somente se ela é paralela a uma reta do plano; dados dois planos secantes, uma reta de um deles é paralela ao outro se e somente se ela é paralela à reta de interseção dos dois planos; se um plano α corta o plano β segundo a reta r, então ele corta qualquer plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r; dois planos são paralelos se e somente se um deles é paralelo a duas retas concorrentes do outro". (p. 177)

7.8 Planos Paralelos e Proporcionalidade

---

33 Ver construção do plano na p.171
34 Ver p. 173
35 Ver p. 174

Teorema de Tales para Planos Paralelos

"Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer" [36]. (p. 180)

Construção de Pirâmides Semelhantes

Considere uma pirâmide. Trace um plano paralelo à base da pirâmide. Este plano dividirá a pirâmide em dois poliedros: uma outra pirâmide que terá sua base neste plano e o vértice coincidindo com o vértice da pirâmide inicial e um *tronco de pirâmide* que terá duas bases: uma o polígono da pirâmide inicial e outra o polígono da pirâmide gerada com o corte. A pirâmide inicial é semelhante à pirâmide gerada pelo corte do plano. [37]

7.9 Atividades em Sala de Aula

Os autores sugerem algumas estratégias para motivar o aluno para os conceitos iniciais de Geometria no Espaço: construir a classificação da posição relativa das retas e planos com a participação dos alunos por meio de exemplos provocativos; buscar exemplos de planos e retas no próprio ambiente que cerca o aluno; apresentar previamente as figuras para que os alunos identifiquem elementos e valorizem as relevância dos conceitos; ilustrar os paralelismos em figuras conhecidas; explorar o conceito de semelhança, retomando os já estudados nas figuras planas e finalmente, sugerir atividades com homotetia.

Capítulo 8: Perpendicularismo

8.1 Retas Perpendiculares

O conceito de perpendicularismo é trazido da geometria plana que também é valido para a geometria espacial: "duas retas concorrentes são *perpendiculares* quando se encontram formando quatro ângulos iguais; cada um deles é chamado de *ângulo reto*". (p. 188) Estendendo o conceito temos que se tomarmos duas retas perpendiculares e quaisquer paralelas respectiva se essas paralelas forem perpendiculares então as outras são *ortogonais*. [38]

8.2 Retas e Planos Perpendiculares

---

[36] Ver demonstração na p.180
[37] Ver p. 181
[38] Ver p.188

“Dizemos que *uma reta é perpendicular a um plano* quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano”. [39] Os autores propõem uma atividade para que os alunos percebam as relações de perpendicularismo entre reta e plano utilizando um pedaço de papel e uma mesa. A atividade sugere o seguinte teorema: “se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular ao plano”. [40] De posse desse teorema podemos construir num plano perpendicular uma reta por um de seus pontos e uma reta perpendicular a um plano por um de seus pontos. [41] Consequências dessas construções são: “se uma reta é perpendicular a um plano, toda reta paralela a ela é também perpendicular ao mesmo plano; se um plano é perpendicular a uma reta, todo plano paralelo a ele é também perpendicular à mesma reta; se duas retas distintas são perpendiculares ao mesmo plano, elas são paralelas entre si; se dois planos distintos são perpendiculares à mesma reta, eles são paralelos entre si.” (p. 193)

8.3 Construções Baseadas em Perpendicularismo de Reta e Plano

As ideias de simetria e congruência estão estreitamente relacionadas com a de perpendicularismo. Elas nos permitem acrescentar outras formas interessantes as já conhecidas como os prismas retos, as pirâmides regulares, tetraedros, octaedros regulares, projeções ortogonais, além de permitir a simetria e reflexões das figuras e estabelecer coordenadas tridimensionais.

Assim, para construir prismas retos é necessário que as arestas laterais sejam perpendiculares ao plano base, tornando suas faces retangulares. Para os *cilindros reto* as geratrizes devem ser perpendiculares a base. E aqui podem aparecer os casos particulares de primas reto como o cubo e de cilindros como o cilindro circular reto.

Para as pirâmides regulares a base deve ser um polígono regular e o vértice deve estar “situado sobre a perpendicular ao plano do polígono conduzida pelo seu centro”. (p. 195) As faces laterais são triângulos isósceles iguais. Analogamente, se tomarmos por base um círculo obtemos um cone circular reto ou cone de revolução, “por ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno do eixo dado por um dos catetos”. (p. 195) O tetraedro é um caso particular de pirâmide regular, pois a base deve ser triangular regular e as arestas laterais devem ser iguais às arestas da base. [42]

---

39 Ver p.189
40 Ver demonstração p. 190
41 Ver construção na p.192
42 Ver p. 195

O octaedro regular é obtido "a partir de três segmentos iguais, e mutuamente perpendiculares, que se cortam no ponto médio de cada um deles. Os segmentos definidos por estes pares de pontos são todos iguais. Traçando todos estes segmentos obtemos um poliedro de oito faces triangulares regulares". (p. 197)

Projeção ortogonal de uma figura é a projeção ortogonal de todos os seus pontos fora do plano em que se deseja projetar. Exercícios de representar vistas de uma forma e vice-versa colaboram para a compreensão de projeção ortogonal. [43]

Simétrico de um ponto em relação a um plano é um outro ponto equidistante do plano ao qual atravessa a perpendicular que passa pelo primeiro ponto e o plano. [44]

O sistema de coordenadas tridimensionais é "construído a partir de três eixos mutuamente perpendiculares e com uma origem comum". (p. 200)

8.4 Planos Perpendiculares

Podemos usar um teorema para dizer quando dois planos serão perpendiculares: "dois planos α e β são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro" [45]. (p. 201)

8.5 Atividades em Sala de Aula

Os autores sugerem que os professores explorem o ambiente que cerca o aluno para a percepção de perpendicularismo de retas e planos e que desenhem as vistas dos objetos tridimensionais e vice-versa.

Capítulo 9: Medindo Distâncias e Ângulos

9.1 Distância entre dois Pontos

Distância entre dois pontos nada mais é que a medida do segmento que os une. Para determinar essa medida às vezes é necessário recorrer ao Teorema de Pitágoras como no caso da medida da diagonal de um paralelepípedo. [46]

9.2 Distância de Ponto a Plano

---

43 Ver p.198
44 Ver p. 199
45 Ver demonstração p. 201
46 Ver p. 207

A distância entre um ponto e o plano é dada pela medida do comprimento do segmento perpendicular passa pelo ponto ao plano. [47]

9.3 Distância de Ponto a Reta

Se tivermos um ponto e uma reta no espaço, a distância entre este ponto e esta reta será a medida do segmento que liga o ponto a um ponto de interseção entre a reta dada e a perpendicular a ela que passa pelo ponto inicial. [48]

9.4 Distância entre Retas Reversas

Retas reversas são aquelas que estão em planos distintos, onde uma delas concorre com a paralela da outra. A distância entre elas é a medida do segmento perpendicular que passa pelo ponto de interseção das retas concorrentes e sua projeção no outro plano, que certamente pertencerá à reta reversa. [49]

9.5 Ângulo entre Retas

Tomemos duas retas no espaço e suas paralelas que passam por um ponto arbitrário. O menor ângulo formado por essas retas será o ângulo formado pelas retas tomadas inicialmente. [50]

9.6 Ângulo entre Planos

O ângulo formado entre planos é determinado pela mesma maneira que se determina planos perpendiculares, ou seja, basta demonstrar "[...] que *o ângulo formado por dois planos é igual ao ângulo formado por duas retas respectivamente perpendiculares a estes planos*" [51]. (p. 217)

Neste momento os autores acham conveniente falar sobre medida de *diedro* que é "a figura formada por dois semiplanos – chamados de *faces* do diedro – limitados pela mesma reta, chamada de *aresta* do diedro. Para medir um diedro, conduzimos um plano perpendicular à aresta e medimos o ângulo entre as *semi-retas* determinadas em cada face" [52]. (p. 217)

9.7 Ângulo entre Reta e Plano

---

47 Ver p. 209
48 Ver p. 211 e teorema da p. 212
49 Ver p. 215
50 Ver p. 216
51 Ver p. 216
52 Ver p. 217

Após a construção do ângulo entre a reta e o plano, os autores definem que "*o ângulo entre uma reta* r *e um plano é igual ao menor ângulo formado por* r *e uma reta qualquer do plano*" [53]. (p. 219)

9.8 A Esfera

Os autores definem superfície esférica como sendo o conjunto de pontos do espaço cuja distancia ao centro O é igual ao raio. [54] "A distância de um ponto em relação a uma esfera é determinada pela sua distância ao centro da esfera". (p. 221) A posição de uma reta ou plano à esfera é feita de maneira análoga à do ponto. Quando um plano corta uma esfera ele determina círculos. Esses círculos são máximos se a distância entre o centro da esfera e o centro do circulo for igual à zero. [55]

9.9 Atividades em Sala de Aula

Os autores dão algumas dicas de elementos que podem ser apresentados em exercícios para não tornar a teoria mais extensa. Sucintamente algumas delas são: usar as diagonais do cubo para introduzir a ideia de esfera inscrita e circunscrita; questionar a existência de esfera circunscrita no paralelepípedo retângulo; explorar os ângulos num paralelepípedo retângulo; verificar a existência de elementos como diagonais, ângulos inscrição e circunscrição de esferas nos demais prismas regulares; mostrar as relações métricas nas diversas pirâmides regulares; explorar as áreas dos poliedros como a soma das áreas de suas faces; relacionar cilindro com esfera e cone com esfera; relacionar conteúdos e nomenclaturas usadas em outras disciplinas para determinar elementos da esfera como calota, fuso, por exemplo. [56]

Capítulo 10: Poliedros

10.1 Introdução

Os autores afirmam que é importante fazer uma definição de poliedro que seja suficiente para as demonstrações dos teoremas e propriedades. Então "*poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde: a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono*;*b) a interseção de duas

---

53 Ver construção p. 218
54 Ver p. 220
55 Ver p. 221
56 Ver p. 223

faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia; [...] c) é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas)". (p. 232)

10.2 As Primeiras Relações

A contagem das faces F, vértices V e arestas A de um poliedro estabelece as primeiras relações: $F = F_3 + F_4 + \ldots$, $V = V_3 + V_4 + \ldots$ então $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots$ e $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots$, onde F_n representa os diferentes gêneros das faces e V_n representa os diferentes gêneros dos vértices, com $n \geq 3$, pois pelo item (b) da definição, "[...] cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas". (p. 234)

10.3 Duas Desigualdades

Das relações anteriores podemos tirar que $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$. [57] Porém, isso só é válido se o poliedro tiver apenas faces triangulares.

A relação de Euler ($V - A + F = 2$) só é válida para poliedros convexos. O primeiro membro da relação é chamado de característica do poliedro.[58]

10.4 Poliedros Regulares

Poliedros regulares são aqueles que possuem em suas faces polígonos regulares iguais e em todos os vértices ocorrem o mesmo número de arestas. São cinco os poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Na sequência, os autores trazem dois subitem onde mostram que a relação de Euler se aplica em regiões do plano, se tornando, assim, um teorema de topologia.[59]

Capítulo 11: Volumes e Áreas

11.1 Introdução

---

[57] Ver justificativa p. 234

[58] Os autores sugerem, para aprofundar o tema, a leitura do livro "Meu Professor de Matemática" do professor Elon Lages Lima, editado pela SBM.

[59] Ver subitens 10.5 e 10.6 das p. 242 e 245 respectivamente.

Neste capítulo irão ser calculados os volumes dos sólidos simples como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esfera. A unidade de medida do volume será o cubo de aresta um. Entende-se por volume a quantidade de espaço por ele ocupado.

11.2 O Paralelepípedo Retângulo

Os autores sugerem o cálculo do volume de paralelepípedo retângulo pelo princípio da proporcionalidade entendendo que o volume é proporcional à terceira dimensão do paralelepípedo mantendo-se constantes as outras duas dimensões, concluindo, então, que o volume é o produto das dimensões. [60]

11.3 O Princípio de Cavalieri

O princípio de cavalieri será dado, aqui, como um axioma, por exigir conhecimentos avançados que não convém ser demonstrados nesta etapa dos estudos, e será ferramenta para o cálculo dos volumes dos demais sólidos geométricos simples. Ele diz que "são dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume." [61] (p. 256)

11.4 Prisma

Usando o princípio de Cavalieri devemos, ao lado do prisma, construir um paralelepípedo retângulo de mesma altura do prisma e com mesma área da base. Ao fazer seções em ambos os sólidos, produzimos outros prismas que possuem bases congruentes e, assim, figuras congruentes de mesma área da base, logo mesmo volume: volume do prisma = (área da base) x (altura).

11.5 A Pirâmide

A chave para se calcular o volume de pirâmides é saber que se o vértice dela se mover num plano paralelo à base, o volume não se altera. A prova disto recorre ao princípio de Cavalieri e ao fato de que a razão das áreas das bases é o quadrado da razão das alturas de uma pirâmide seccionada por planos paralelos à base. Para provar que o volume da pirâmide é igual a um terço do volume do prisma de mesma base e altura, os autores recorreram à divisão de um prisma de base triangular regular em três tetraedros. [62]

11.6 Cilindros e Cones

---

60 Ver teorema fundamental da proporcionalidade na p. 254

61 Ver nota 3 na p. 256

62 Ver teorema na p. 260

Os volumes dos cilindros e cones se determinam de maneira análoga aos volumes dos prismas e pirâmides respectivamente.

11.7 Atividades para Sala de Aula

Os autores sugerem a associação de esferas inscritas e circunscritas com cilindros e cones retos; explorar a propriedade do cilindro equilátero de possuir menor área total com objetos concretos e raios, ângulos centrais e alturas de cones.

11.8 A Esfera

O cálculo do volume da esfera também é sugerido pelo princípio de Cavalieri, apoiando num plano uma esfera e um cilindro do qual se extrairá dois cones e cuja secção por planos geram coroas de áreas congruentes às áreas dos círculos na secção da esfera. Então temos que o volume da esfera é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraído de dois cones de raio R e altura R, o que resulta em $\frac{4}{3}\pi R^3$. [63]

Para o cálculo da área da esfera os autores sugerem o presente no livro Medida e Forma em Geometria, p. 81, ou em dividir a superfícies em um grande número de regiões de modo que se tornem quase planas que serão base de cones com vértice no centro da esfera. Se o volume da esfera for à soma dos volumes dos cones temos que a área da esfera é $4\pi R^2$. [64]

Os autores afirmam que esse método para se obter a área da esfera é o mais plausível tendo em vista o nível de desenvolvimento dos estudantes.

11.9 Atividades para Sala de Aula

Trabalhar atividades que relacionem área e volume da esfera com o cilindro circunscrito; calcular área e volume de fusos esféricos; fazer relações entre a razão de semelhança e as razões das áreas e dos volumes.

Capítulo 12: Superfícies e Sólidos de Revolução

12.1 Introdução

---

63 Ver p. 268

64 Ver p.269

"Consideremos em um plano, uma reta E chamada eixo e uma linha L, simples, que não corta esse eixo. Imagine que essa linha "gire" em torno do eixo, ou seja, cada ponto L descreva uma circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E. Cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências é chamada uma *superfície de revolução*. Se a linha L for fechada ou se seus extremos pertencerem ao eixo, a superfície de revolução delimita um sólido chamado *sólido de revolução*." (p. 275)

12.2 Centro de Gravidade

Vamos considerar dois axiomas: "1) o centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio; 2) se uma figura possui um eixo de simetria então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo." (p. 278)

Nos subitens **12.3** e **12.4** os autores trazem exemplos na física e com linhas poligonais que ilustram a definição de centro de gravidade, que esta assim definido: "Se uma linha poligonal P é formada por segmentos consecutivos $l_1, l_2, \ldots, l_n$, de comprimentos $a_1, a_2, \ldots a_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k, o *centro de gravidade* de P é o ponto $G = (x, y)$ onde: $x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ e $y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$." (p. 280)

12.5 Área Lateral de um Tronco de Cone

A área lateral de um tronco de cone é calculada pela diferença das áreas laterais de um cone inicial e de outro cone obtido pela secção desse cone por um plano paralelo a base, já que são semelhantes. Ambos os cones são gerados pela rotação de um triângulo retângulo.

O **1º Teorema de Pappus** vem na sequência para auxiliar no cálculo da área de superfícies de revolução. Seu enunciado diz que "*se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*" [65] (p. 284)

12.6 Centro de Gravidade de um Polígono

[65] Ver demonstração p. 284

A definição de centro de gravidade de um polígono é bem parecida com a de centro de gravidade de uma poligonal, só que ao invés da coordenada (x_k, y_k) ser o ponto médio de um segmento, ela é o baricentro de um polígono.

12.7 A Rotação de um Retângulo

A rotação de um retângulo em torno de um eixo nos leva ao **2º teorema de Pappus** "*se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicada pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro*". (p. 290)

O volume e a área da esfera também podem ser calculados pelos teoremas de Pappus, conforme mostra os subitens **12.8**, **12,9** e **12.10**. [66]

Volume 3

Elaborado por: Uaiana e Silva Prates

Os três volumes da obra intitulada "A Matemática do Ensino Médio" fazem parte da coleção de livros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Esta coleção está inserida nas obras destinada ao professor de Matemática. Formado por seis capítulos, o terceiro volume da coleção traz alguns conteúdos, os quais são ensinados no Ensino Médio do Brasil. Dentre eles estão: geometria analítica, sistema de equações lineares, matrizes e determinantes, números complexos e equações algébricas.

Os dois primeiros capítulos do livro tratam do conteúdo Geometria Analítica, o primeiro "Geometria Analítica Plana" e o segundo "Geometria Analítica Espacial". Esse dois primeiros capítulos são de autoria dos professores Elon Lages Lima e Eduardo Wagner, ambos os professores e pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Rio de Janeiro e idealizadores desse trabalho juntamente com os professores Paulo Cezar P. Carvalho e Augusto César Morgado. Este trabalho também se insere em um projeto do IMPA chamado "Programa de aperfeiçoamento para professores do Ensino Médio", "que em sendo realizado pelo IMPA desde 1996, com apoio da CAPES e da FAPERJ" (LIMA *et al.*, 1999, Prefácio). Os capítulos 3 e 4, também de autoria dos professores Elon Lages Lima e Eduardo Wagner, abordam os conteúdos "Sistema de Equações Lineares" e "Matrizes e Determinantes",

---

[66] Ver p. 295 e 296

respectivamente. O capítulo 5 é de autoria do professor Augusto César Morgado e trabalha os "Números Complexos". O último capítulo sobre "Equações Algébricas" foi escrito pelo professor Paulo Cezar P. Carvalho.

Aqui se encontra um resumo desses seis capítulos desse volume. Apontando as principais definições necessárias para a compreensão dos conteúdos de cada capítulo. Dividiremos esse resumo com a numeração dos capítulos e das seções do livro. As definições são tiradas do livro na íntegra.

Capítulo 1 – Geometria Analítica Plana

1) Sobre "Geometria Analítica Plana" o livro aborda conceitos básicos no uso de coordenadas. A introdução deixa clara que "não há nenhuma preocupação de completeza" (LIMA *et al*., 1999, p. 1) e cita, para um entendimento mais aprofundado, o livro "Coordenadas no Plano" da coleção do Professor de Matemática da SBM.

2) Coordenadas na reta: "Uma reta diz-se *orientada* quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. [...] Um *eixo* (*E*) é uma reta orientada a qual se fixou um ponto *O* chamado de *origem*. [...] À origem *O* do eixo faz-se corresponder o número zero. A cada ponto *X* de *E* situado à direita de *O* corresponde o número real positivo $x=d(O,X)$ = distância de *X* à origem = comprimento do segmento de reta *OX*. [...] Aos pontos situados à esquerda de *O* correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos a origem." (p. 2)

A distância entre os pontos *A* e *B* é o comprimento de reta *AB* e escrevem *d(A, B)* para indicar a distância entre os pontos *A, B* quaisquer: $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$.

Destacam ainda que $d(A,A)=0$. Se $A\neq B$, tem-se $d(A,B)>0$.

3) Coordenadas no plano: "Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano π consiste num par de eixos perpendiculares *OX* e *OY* contidos nesse plano" (p. 2). *OX* é o eixo das *abscissas* e *OY* o eixo das *ordenadas*. Um ponto *P* no sistema *OXY* terá um par ordenado de números reais $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Os autores lembram que "o emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. [...] o de atribuir um significado geométrico a fatos da natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real

[…] e o segundo […] vai no sentido oposto: recorre-se a elas (as coordenadas) a fim de resolver problemas da Geometria" (p. 6)

4) A distância entre dois pontos: se *P = (x, y)* e *Q = (u, v)*, consideramos o ponto *S = (u, y)*, vemos que *PSQ* é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ (Figura 1).

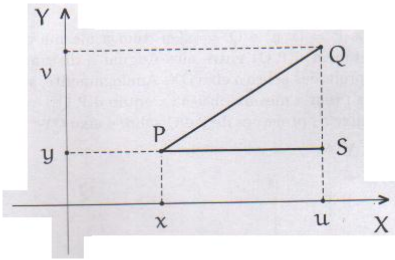

Figura 1: figura 11 (ELON, *et al.*, 1999, p. 14).

Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abscissa segue-se que

$$d(P,S)=|x-u| \quad \text{e} \quad d(S,Q)=|y-v|$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(P,Q)^2=d(P,S)^2+d(S,Q)^2 \Rightarrow d(P,Q)^2=(x-u)^2+(y-v)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P,Q)=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

"A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenadas desses pontos, serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica" (p. 14)

5) Escolhendo o sistema de coordenadas: "[...] se temos um problema geométrico (que não menciona coordenadas) e queremos resolvê-lo usando Geometria Analítica, temos a liberdade de introduzir no plano o sistema de coordenadas que acharmos mais conveniente para o nosso problema[67]" (p. 19)

6) As equações da reta: "Chama-se equação de uma curva *C* a uma igualdade envolvendo as variáveis *x, y* a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto *P = (x, y)* pertence à curva *C*" (p. 23). Mostraremos os "três tipos principais de equações que definem retas no plano" (p. 24):

$y=ax+b$; $ax+by=c$, com $a^2+b^2\neq 0$; $\begin{cases} x=(1-t)a+tc=a+t(c-a) \\ y=(1-t)b+td=b+t(d-b) \end{cases}, \text{onde } t\in\mathbb{R}$ [essas últimas chamam-se *equações paramétricas* da reta *AC*, com *A = (a, b)* e *C = (c, d)*]

67 Vejam os exemplos do próprio livro nas páginas 19, 20, 21 e 22.

7) Ângulo entre duas retas (r e r'): observando a figura 2 abaixo e utilizando o cosseno do ângulo α, teremos: $|\cos\alpha| = \dfrac{|aa'+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$.

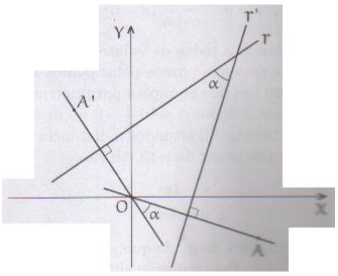

Figura 2: figura 25 (ELON, *et al.*, 1999, p. 22).

8) Distância de um ponto a uma reta: antes de calcularmos a distância entre um ponto P e uma reta r determina-se primeiro a distância entre duas retas paralelas (LIMA *et al.*, 1999, p. 33). Uma contendo o ponto $P=(x_0,y_0)$ e a outra r, dada por $ax+by=c$. Tem-se a expressão $d(P,r)=\dfrac{|ax_0+bx_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ para a distância do ponto $P=(x_0,y_0)$ à reta $ax+by=c$.

9) Área de um triângulo: área de $A_1A_2A_3$ (vértices do triângulo) = área de OPQ (triângulo com um dos vértices na origem e os segmentos OP e OQ equipolentes[68] a A_3A_1 e A_3A_2 , respectivamente (ver "Figura 33" em LIMA *et al.*, 1999, p. 40).

$$Área\,de\,A_1A_2A_3=\frac{1}{2}|(a_1-a_3)(b_2-b_3)-(a_2-a_3)(b_1-b_3)|$$.

10) Equação da circunferência: "A circunferência de centro $A=(a,b)$ e raio $r>0$ é o conjunto Γ formado pelos pontos $P=(x,y)$ tais que $d(A,P)=r$. Assim, $P=(x,y)$ pertence a Γ se, e somente se, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

11) Vetores no plano: "Vetores servem principalmente para deslocar pontos ou, mais precisamente, efetuar translações. E deslocando cada um dos pontos de uma figura, eles efetuam uma translação dessa figura". (p. 54)

Quando dois segmentos orientados AA' e CC' são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo *vetor v*. Escreve-se $v=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$.

68 "Dois segmentos de reta no mesmo plano dizem-se *equipolentes* quando: 1) Têm o mesmo comprimento; 2) São paralelos ou colineares; 3) Têm o mesmo sentido". (Lima, *et al.*, p. 55)

Seja $v=\overrightarrow{AA'}$. Se $A=(a,b)$ e $A=(a,b)$ então os números $\alpha=a'-a$ e $\beta=b'-b$ chamam-se as *coordenadas do vetor v* no sistema de coordenadas considerado. Escreve-se então $v=(\alpha,\beta)$.

"A soma de dois vetores *v* e *w* pode ser definida de duas maneiras equivalentes. A primeira consiste em representar $v=\overrightarrow{AA'}$ e, sem seguida, representar $w=\overrightarrow{A'A''}$, por um segmento orientado cujo inicio seja a extremidade final A' do primeiro segmento e pôr $v+w=\overrightarrow{AA''}$, por definição. A outra maneira consiste em representar os vetores $v=\overrightarrow{AA'}$ e $w=\overrightarrow{A'C}$ por segmentos orientados com o mesmo inicio e definir $v+w=\overrightarrow{AD}$, onde *AD* é a diagonal do paralelogramo que tem dois lados consecutivos iguais a *AA'* e *AC*. A primeira definição funciona mesmo que os segmentos *AA'* e *A'A''* sejam colineares. A segunda só faz sentido (isto é, só se tem um paralelogramo) quando *AA'* e *AC* formam um ângulo não-nulo". (p. 59)

Existem outras definições importantes no capítulo 1, como o vetor nulo e o vetor unitário, o vetor simétrico, as propriedades formais da adição de vetores e o produto interno dos vetores não nulos. Porém, tratando-se de um resumo do livro selecionamos algumas ideias, que julgamos principais, do conceito de vetor.

O capítulo 1 ainda traz vários problemas ao longo das seções e 54 exercícios no final do capítulo.

Capítulo 2 – Geometria Analítica Espacial

1) O livro destaca que o estudo da "Geometria Analítica Espacial" que será feito se limita praticamente à equação do pleno e alguns temas relacionados. "Ele (o estudo) é feito com vistas aos sistemas de equações lineares, um assunto proeminente na Matemática do Ensino Médio". (p. 73)

Os autores sugerem o livro "Coordenadas no Espaço", da Coleção do Professor de Matemática da SBM para um estudo mais completo desse conteúdo.

2) Coordenadas no espaço: sistema de coordenadas (cartesianas) no espaço euclidiano tridimensional (E) consiste em três eixos *OX*, *OY* e *OZ*, com a mesma origem *O*, tais que qualquer um deles é perpendicular a cada um dos outros dois. Indica-se com a notação *OXYZ.*

“A escolha do sistema *OXYZ* faz com que se possa associar a cada ponto P do espaço um terno ordenado (*x, y, z*) de números reais, chamados as *coordenadas* do ponto P relativamente a esse sistema”. (p. 74)

Chama-se plano vertical quando esse é paralelo ao eixo *OZ* ou o contém. Chama-se plano horizontal quando é perpendicular ao eixo *OZ*.

3) As equações paramétricas de uma reta (*r*):

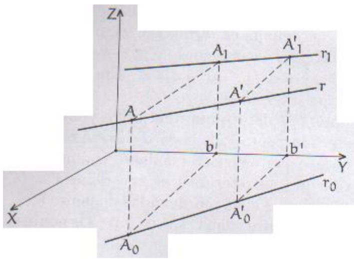

Figura 3: figura 58 (ELON, *et al.*, 1999, p. 76).

$$x = a + t(a' - a) \quad ,$$

$$y = b + t(b' - b) \quad \text{e}$$

$$z = c + t(c' - c) \quad ,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Estas são as equações paramétricas da reta que contém os pontos *A = (a, b, c)* e *A' = (a', b', c')*. (A demonstração completa para chegar às equações paramétricas de uma reta encontra-se em LIMA et al., 1999, p. 75 e 76).

4) Distância entre dois pontos no espaço: dados *P = (x, y, z)* e *P' = (x', y', z')*, considere os pontos *Q = (x, y, z')* e *R = (x, y', z')*. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos retângulos *PQP'* e *QRP'*, nos dá, sucessivamente:

$$d(P,P')^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,P')^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 + d(R,P')^2 \ .$$

Como *(P, Q), (Q, R) e (R, P')* são pares de pontos com duas coordenadas iguais, resulta da observação inicial que

$$d(P,P')^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2 \Rightarrow d(P,P') = \sqrt{(z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2} \ .$$

5) Vetores no espaço: em um sistema de coordenadas *OXYZ*, com *A = (a, b, c)*, *A'= (a', b', c')*, *P = (m, n, p)* e *P' = (m', n', p')*, tem-se $\vec{AA'} = \vec{PP'} = v$ se, e somente se, *a' – a = m' – m*,

$b'-b=n'-n$ e c' – c = p' – p. Pondo $\alpha=a'-a$, $\beta=b'-b$ e $\gamma=c'-c$, escreve-se $v=(\alpha,\beta,\gamma)$ e diz-se que estas são as coordenadas do vetor $v=\vec{AA'}$ no sistema *OXYZ*.

Assim como no capítulo 1, também existem no dois outras definições importantes, como o vetor nulo e o vetor unitário, o vetor simétrico, adição de vetores e o produto de um vetor por um número real, o inverso aditivo, o comprimento de um vetor, o produto interno dos vetores não nulos. Porém, tratando-se de um resumo do livro selecionamos a ideia de representação do vetor no espaço. Algumas outras definições são análogas ao plano e podem ser deduzidas a partir da definição de vetor no espaço, ou seja acrescentando uma coordenada, outras exigem uma leitura mais aprofundada do livro.

6) Equação do plano: "Seja π um plano no espaço E , onde se escolheu um sistema de coordenadas *OXYZ*. Tomemos a reta *OA*, que passa pela origem, pelo ponto *A = (a, b, c)* e é perpendicular ao plano π. Afirmamos que existe um número real d tal que a equação do plano π é $ax+by+cz=d$, isto é o ponto *P = (x, y, z)* pertence ao plano π se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a relação acima" (p. 87).

7) Distância de um ponto a um plano: considere $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto no sistema *OXYZ* e um plano π, dado pela equação *ax + by + cz = d*. A distância $d(P_0,\pi)$ de P_0 ao plano π é:

$$d(P_0)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ .$$

O capítulo 2 disponibiliza alguns exemplos de exercícios resolvidos ao longo das seções e 40 exercícios no final do capítulo.

Capítulo 3 – Sistemas de Equações Lineares

1) Sistema com duas incógnitas: convenciona-se que, ao escrever uma equação $ax+by=c$, está admitindo que $a^2+b^2\neq 0$.

"Uma *solução* do sistema linear (*) $\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}$ é um par $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas *x, y* satisfazem ambas as equações. O sistema (*) se diz *indeterminado*, *impossível* ou *determinado* quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente" (p. 97)

“Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (*), deve-se examinar o quadro dos coeficientes $m=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$” (p. 98). Esse objeto matemático chama-se *matriz*[69].

Mais detalhes de como encontrar as soluções do sistema, se ele é indeterminado, impossível ou determinado ver a seção 1 do capítulo 2 (p. 97, 98, 99 e 100).

2) Duas equações com três incógnitas: o terno $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ chama-se *solução* do sistema $\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{matrix}$ quando suas coordenadas *x, y, z* satisfazem ambas as equações” (p. 100).

3) Três equações com três incógnitas: considere o sistema $\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{matrix}$ de três equações com três incógnitas. Estas equações definem os planos π_1, π_2 e π_3, respectivamente. Um terno $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ é solução do sistema quando o ponto *P = (x, y, z)* pertence à interseção $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$, isto é, quando P está simultaneamente em cada um dos três planos.

Existem 8 casos possíveis, do ponto de vista da existência ou não de soluções do sistema, dos planos definidos pelas três equações acima apresentadas: o primeiro é quando os três planos coincidem; o segundo caso é quando dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles; o terceiro caso é quando dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta; o quarto caso é quando os planos são paralelos dois a dois; o quinto caso quando dois planos são paralelos e o terceiro os intersecta segundo retas paralelas *r* e *s*; o sexto caso é quando os três planos são distintos e têm uma reta *r* em comum; o sétimo caso é quando os três planos se intersectam, dois a dois, segundo três retas paralelas umas às outras; o oitavo caso é quando os três planos tem um único ponto em comum. Mais detalhes sobre as diferentes possibilidades e soluções do sistema ver as páginas 108 a 117 do capítulo 3, existem várias imagens para ilustrar os casos assim como diversos exemplos dos mesmos.

4) Escalonamento (eliminação gaussiana): essa seção retoma a análise feita na seção anterior sobre os sistemas lineares de três incógnitas mas dessa vez sobre um ponto de vista algorítmico e não geométrico. Esse ponto de vista algorítmico será mediante um processo que

---

69 O capítulo 4 desse livro é dedicado ao estudo de “Matrizes e Determinantes”.

conduzirá, passo a passo, "não apenas à resposta para a questão da existência de soluções, como também à determinação explícita de tais soluções, quando existirem" (p. 118).

"Diz-se que uma matriz é *escalonada* quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma das suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Além disso, as linhas que tiverem todos os seus elementos iguais a zero devem estar abaixo das demais" (p. 118).

Alguns exemplos resolvidos nas páginas 118 a 125 ajudam no entendimento de tal conceito. Nas páginas 126, 127, 128 e 129 encontram-se 16 exercícios de todo o conteúdo do capítulo 3.

Capítulo 4 – Matrizes e Determinantes

1) "A ideia geral de matriz do tipo *m* x *n* é a de uma quadro retangular com *mn* elementos, dispostos em m linhas e n colunas. [...] Matrizes são frequentemente utilizadas para organizar dados. [...] Na Matemática do Ensino Médio, as matrizes ocorrem principalmente como quadros dos coeficientes de sistemas de equações lineares. [...] uma matriz *m* x *n* é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz m é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de *i*-ésima linha com a *j*-ésima coluna: $m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ chama-se a *i-ésima linha* ou o *i-ésimo vetor-linha* da matriz m enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ é a *j-ésima coluna* ou o *j-ésimo vetor-coluna* de m. [...] Diz-se que a matriz é *quadrada* quando tem o mesmo números de linhas e colunas" (p. 130 e 131).

2) Multiplicação de matrizes: o livro mostra a principal diferença entre o estudo de matrizes em Álgebra Linear e no Ensino Médio, focando em alguns exemplos (ver exemplos nas páginas 131 a 136) mais simples de multiplicação de matrizes no segundo caso. Destaca que em Álgebra linear as matrizes surgem associadas a transformações lineares e produto de duas matrizes.

3) Determinantes: o autor faz um estudo do determinante de uma matriz *3* x *3* e acrescenta que o caso geral, de uma matriz *m* x *n*, pode ser tratado de modo análogo, com uma notação

mais complicada. “O *determinante* da matriz $m=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ é o número $\Delta = det m = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2$. O livro também lista as 8 principais propriedades do determinante de uma matriz nas páginas 138 e 139 e faz a demostração de cada uma delas nas páginas 139, 140 e 141. Não colocaremos aqui por se tratar de um resumo, mas queremos destacar a importância dessas propriedades e de suas demonstrações.

4) A regra de Cramer: “é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes” (p. 143). O livro destaca que essa regra possui duas desvantagens em relação ao escalonamento: o primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero (quando o sistema possui uma única solução) e o segundo é o custo operacional, segundo o livro “dá bem mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz *3* x *3*” (p. 143).

Considere o sistema (*) $\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d3 \end{matrix}$, no qual se supõe que a matriz **m** dos coeficientes tenha determinante diferente de zero. A regra de Cramer exprime a solução do sistema por meios de determinantes. Para deduzir a regra de Cramer trabalha-se com os vetores-coluna: $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3)$ e $d=(d_1,d_2,d_3)$. Em termos desses vetores, as equações do sistema (*) se exprimem como uma única equação vetorial. “Mais precisamente, elas dizem que o vetor d é uma combinação linear dos vetores a, b e c: $x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c = d$” (p. 144). Daí resulta, pelas propriedades 4, 3 e 2[70], que:

$det[d,b,c] = det[x \cdot a + y \cdot b + z \cdot c, b, c] = x det[a,b,c] + y det[b,b,c] + z det[c,b,c]$ □

□ $det[d,b,c] = x det[a,b,c]$.

Portanto $x = \frac{det[d,b,c]}{det[a,b,c]}$. Analogamente, tem-se $y = \frac{det[a,d,c]}{det[a,b,c]}$, $x = \frac{det[a,b,d]}{det[a,b,c]}$. “Essas três fórmulas, que fornecem os valores das incógnitas x, y, z em termos de determinantes, constituem a regra de Cramer.

Ver algumas aplicações da regra de Cramer nas páginas 144 e 145 desse volume.

70 Ver as propriedades do determinante de uma matriz nas páginas 138 a 141 do capítulo 4.

5) O determinante do produto de duas matrizes: "Se m e n são matrizes *2* x *2*, uma verificação extremamente simples mostra que o determinante da matriz-produto mn é igual ao produto $\det m \cdot \det n$ " (p. 146). O livro mostra que a fórmula $\det mn = \det m \cdot \det n$ estende-se para o caso geral de matrizes *n* x *n*. Ver páginas 146 a 152.

6) Caracterização das matrizes invertíveis: "A maneira mais popularizada de caracterizar a invertibilidade de uma matriz é por meio do seu determinante, conforme o **Teorema.** *A matriz quadrada* **m** *é invertível se, e somente se,* $\det m \neq 0$." (p. 152)

O livro demonstra esse teorema nas páginas 152 e 153 e conclui que as seguintes afirmações a respeito de uma matriz 3 x 3 são equivalentes: 1. As linhas de m são linearmente independentes; 2. Todo sistema de equações lineares mx = d tem solução única, seja qual for a matriz d, do tipo 3 x 1; 3. $\det m = \det m^T \neq 0$; 4. As colunas de m são linearmente independentes; 5. Existe uma única matriz m^{-1} tal que $m^{-1}m = mm^{-1} = I_3$ (m é invertível).

Nas páginas 154, 155, 156, 157, 158 e 158 encontram-se 26 exercícios que abordam os conteúdos "Matrizes e Determinantes" do capítulo 4.

Capítulo 5 – Números complexos

1) O livro destaca alguns momentos na história da matemática os quais o estudo dos números complexos (não com esse nome) apareceram, primeiramente em 1545 com Jerônimo Cardano (1501 – 1576). Em seu livro "Ars Magna" (A Grande Arte), "mostrou o método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamado de Fórmula de Cardano. Bombelli (1526 – 1572), discípulo de Cardano, em sua "Álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ obtendo $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Embora não se sentisse completamente a vontade em relação às raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofísticas), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-lhes as regras usuais da Álgebra" (p. 160). Os matemáticos, a partir de Bombelli, não se sentiam muito confortáveis em trabalhar com as raízes quadradas de números negativos, porém o próprio Bombelli "trabalhava sistematicamente com $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por *i*. Apenas no século XIX, quando Gauss (1787 – 1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece" (p. 161).

2) A forma algébrica: um número complexo é um número da forma *x + yi*, com *x* e *y* reais e $i=\sqrt{-1}$. O complexo é representado pelo ponto P (*x*, *y*) num sistema de coordenadas no plano dado. "O ponto P é chamado de imagem do complexo z" (p. 161). Frequentemente identifica-se os complexos a suas imagens escrevendo (*x*, *y*) = *x* +*yi*. "As coordenadas *x, y* do complexo *z = x +yi* são chamadas respectivamente de *parte real* e *parte imaginária* de z_0 . Escreve-se Re (*z*) = *x* e Im (*z*) = *y"* (p. 161). O livro traz diversos exemplos e 20 exercícios sobre a forma algébrica dos números complexos. O autor encerra a seção 2 com uma lista de propriedades de complexos conjugados (ver as propriedades e provas das mesmas nas páginas 164 e 165).

3) A Forma Trigonométrica: nessa seção a representação de um complexo muda do ponto $P=(x,y)$ para o vetor $\vec{OP}=(x,y)$.

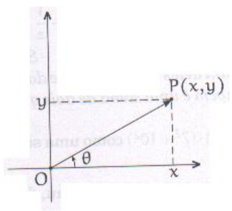

Figura 4: figura 79 (ELON, *et al.*, 1999, p. 168).

"O módulo de um complexo *z = x + yi* é definido como sendo o módulo do vetor que o representa, ou seja, é o valor r da distância de sua imagem P à origem" (p. 168).

"Um *argumento* de um complexo $z\neq 0$, *z = x + yi*, é, por definição, qualquer dos ângulos $\theta=argz$ que o vetor $\vec{OP}$ forma com o semi-eixo positivo dos x" (p. 168). A *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo *z* é dada por $z=x+yi=r\cos\theta+irsen\theta=r(\cos\theta+rsen\theta)$ (os números r e θ são as *coordenadas polares* do ponto P (x, y) do plano).

Essa seção mostra ainda alguns teoremas com suas respectivas provas 6 exemplos resolvidos e 40 exercícios sobre "A Forma Trigonométrica" dos números complexos.

4) Raízes da unidade: o livro trata de uma estrutura que segundo o autor é interessante e é dada, para cada n fixo, pelas raízes *n*-ésimas da unidade. "Sabemos que há exatamente *n* raízes *n*-ésimas da unidade e que as imagens dessas raízes no plano complexo são os vértices de um polígono regular de *n* lados com centro na origem" (p. 182).

Ou seja, $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1[cos0+isen0]}=\sqrt[n]{1}\left[\cos\frac{0+2k\pi}{n}+isen\frac{0+2k\pi}{n}\right]=\cos\frac{2k\pi}{n}+isen\frac{2k\pi}{n}$,

para k = 0, 1, ... , n – 1. Fixando n, as raízes n-ésimas da unidade são representadas por ε_k ,

$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+isen\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\ldots,n-1$.

O livros acrescenta com alguns exemplos e mostra algumas “propriedades interessantes” das raízes n-ésimas da unidade (n fixo) (ver páginas 183 a 188). Os 13 exercícios disponíveis nessa seção encontram-se nas páginas 188, 189 e 190.

5) Inversão: o livro inicia essa seção já com a definição de 'Inversão” a qual colocaremos aqui na íntegra.

Seja k um número positivo e seja O a origem do sistema de coordenadas. A inversão de centro O e potência k^2 é uma transformação do plano (com a origem excluída) nele mesmo, que a cada ponto P associa o ponto P' tal que P' e P são colineares com O (P' e P na mesma semi-reta de origem 0) e $OP\cdot OP'=k_2$.

“A obtenção do inverso de um ponto P pode ser feita facilmente com régua e compasso” (p. 190).

Coordenadas: quando existe um ponto P(x, y), as coordenadas de P', segundo a definição de inversão acima, serão da forma (tx, ty), com $t>0$.

Como $OP\cdot OP'=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}=t\cdot(x^2+y^2)=k^2$, tem-se $t=\frac{k^2}{x^2+y^2}$.

Números complexos e inversão: se z = x + yi $\rightarrow$ $\frac{1}{z}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ e $\frac{k^2}{\bar{z}}=\frac{k^2x}{x^2+y^2}+\frac{k^2y}{x^2+y^2}i$.

“Portanto, a função $f(x)=k^2/\bar{z}$ transforma cada complexo z no seu inverso (centro de inversão O e potência de inversão k^2 ” (p. 192)

Preservando retas e circunferências: colocaremos aqui apenas os três teoremas sobre esse tópico, porém, as provas dos teoremas e corolário resultante do primeiro teorema encontra-se nas páginas 192 a 195 do livro.

Teorema. *O inverso de uma circunferência que contém o centro de inversões é uma reta, perpendicular à reta que contém o centro da circunferência e o centro de inversão*.

Teorema. *O inverso de uma circunferência que não contém o centro de inversão é outra circunferência*.

Teorema. *As retas que contém o centro de inversão são suas próprias inversas*.

Preservando ângulos: o autor destaca que essa é uma das mais importantes propriedades da inversão, que a "inversão preserva ângulos (embora reverta orientações). Mais precisamente, se duas curvas formam um ângulo ϑ em um ponto que não é o centro de inversão, suas inversas formam um ângulo igual a $-\vartheta$" (p. 195).

Os 11 exercícios que encerram essa seção e o capítulo de "Números complexos" encontram-se nas páginas 196 e 197.

Capítulo 6 – Equações Algébricas

1) "O objetivo desse capítulo é o estudo das equações algébricas (isto é, equações da forma *p(x) = 0*, onde *p* é uma função polinomial)" (p. 198). O livro mostra um exemplo de aplicação de equações algébricas que segundo o autor ocorrem naturalmente. O autor acrescenta que "embora a resolução de equações algébricas do segundo grau fosse dominada desde a Antiguidade, somente na época do Renascimento foram alcançados os primeiros resultados relativos a equações de grau superior a 2" (p. 199). E foi nessa busca por métodos algébricos mais gerais de solução que a matemática foi desenvolvendo, incluindo o trabalho com os números complexos. O autor cita, como forma de revisão, o estudo das equações algébricas feito por eles sobre polinômios reais no Volume 1 dessa coleção. Acrescenta que nesse capítulo fará um estudo das equações algébricas só que considerando os polinômios complexos.

2) Polinômios complexos: "Uma função $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ para todo $x\in\mathbb{C}$" (p. 200). Os *coeficientes* da função polinomial são os números $a_0, a_1, \dots, a_n$. Quando $a_n \neq 0$, dizemos que *p* tem *grau n*. Se um número complexo α é tal que *p*(α) *= 0*, dizemos que α é raiz de *p*. Um *polinômio* complexo é uma expressão formal do tipo $p(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1 X + a_0$, onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números complexos e X é um símbolo, chamado de indeterminada.

3) Divisão de Polinômios: "Se um polinômio *p* pode ser escrito como o produto $p=p_1 p_2$ de dois polinômios p_1 e p_2 , então um complexo α é raiz de p se, e somente se, α é a raiz de p_1 ou raiz de p_2 , já que $p_1 p_2=0 \Leftrightarrow p_1(x)=0$ ou $p_2(x)=0$ " (p. 204).

4) Divisão de um polinômio por (*x* – *a*): o livro destaca que o caso mais importante de divisão de polinômios é o qual o divisor é da forma (*x* – *a*). E acrescenta que "ao dividir um polinômio qualquer por (*x* – *a*) obtemos um resto *q*(*x*) e um resto $r(x)=r_0$, satisfazendo $p(x)=(x-a)q(x)+r_0$. Calculando o valor numérico de ambos os lados para *x* = *a*, obtemos $p(a)=r_0$ " (p. 210). Um número *a* é raiz d p(*x*) se, e somente se, p(*x*) é divisível por *x* – *a*.

Vários exemplos nessa seção ilustram o uso e a importância desse tipo de divisão de polinômios.

5) Reduzindo o grau de uma equação algébrica: uma vez encontrada , por algum processo, uma raiz *a* do polinômio *p* de grau *n*, podemos reduzir o problema original dividindo o polinômio *p* por (*x* – *a*) e encontrar as raízes de *q*(*x*) = 0, onde o grau de *q* é uma unidade inferior ao grau de *p*. "É claro que a redução depende de se encontrar uma raiz de *p*; é claro, também, que nada garante que a nova equação seja de simples resolução" (p. 216). A seção mostra alguns exemplos de redução nas páginas 216 e 217.

6) O Teorema Fundamental da Álgebra: "*Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a* 1 *possui pelo menos uma raiz complexa*" (p. 219). A seção 9 foi reservada para a demonstração desse teorema que segundo os autores esse embora seja fundamental para Álgebra, "o teorema acima é um teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas" (p. 219)

7) Relações entre coeficientes e raízes: Considere um polinômio $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ e considere suas *n* raízes complexas $x_1, x_1, \ldots, x_n$. *p*(*x*) pode ser escrito na forma $p(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Desenvolvendo o produto acima, que produzirá 2^n termos, e agrupando os termos semelhantes, podemos exprimir os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de *p*(*x*) em termos de suas *n* raízes $x_1, x_1, \ldots, x_n$. Chega-se ao termo S_k que é a soma dos produtos das raízes de *p*, tomadas *k* a *k* e S_n é o produto de todas as raízes de p.

O desenvolvimento de $c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ fornece:

$$P(x)=cx^n-cS_1x^{n-1}+cS_2x^{n-2}\cdots+c(-1)^kS_kx^{n-k}\cdots+c(-1)^nS_n\ .$$

A demonstração acima se encontra com mais detalhes nas páginas 221, 222 e 223 assim como alguns exemplos de aplicações dessa relação.

8) Equações algébricas com coeficientes reais: nessa seção o livro trabalha apenas com as propriedades das equações algébricas que têm coeficientes reais. A partir do seguinte teorema: *Se o complexo a + bi é uma raiz complexa não real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado a – bi também é raiz da equação, com a mesma multiplicidade*. O livro aponta que a principal propriedade das equações algébricas com coeficientes reais é a de que "raízes não-reais de equações algébricas com coeficientes reais ocorrem aos pares" (p. 225), devido ao teorema acima. Nessa seção encontra-se a demonstração desse teorema e alguns exemplos de aplicação do mesmo. O autor destaca ainda que "outra consequência importante é a de que *equações algébricas com coeficientes reais tendo grau ímpar sempre possuem pelo menos uma raiz real*" (p. 226). A dedução dessa afirmação encontra-se nas páginas 227 e 228.

9) Demonstrando o Teorema Fundamental da Álgebra: nessa seção os autores deixam clara a diferença dessa demonstração para a apresentação feita na seção 6. Segundo eles a apresentação feita nas páginas 219 e 220 é como fazem os livros-textos de Matemática do Ensino Médio: "A rigor, ele é apresentado nos livros como se fosse um axioma, sem quaisquer razões para pelo menos mostrar que se trata de um resultado plausível" (p. 230). Porém nessa seção encontra-se uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que segundo os autores apesar de requerer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no Ensino Médio, "é interessante que pelo menos o professor tenha uma ideia sobre como demostrá-lo" (p. 230).

Nas páginas 230, 231, 232 e 233 encontra-se a demonstração desse teorema. Não colocaremos aqui por se tratar de um resumo indicativo.

10) Resolução algébrica de equações: no período aproximado de 1500 a 1800 algumas perguntas sobre resolução de equações algébricas genéricas foram responsáveis por grandeza avanços da Matemática. Tartaglia obteve uma fórmula de resolução, envolvendo radicais, para equações do 3º grau. Logo depois, Ferrari generalizou o processo para as equações de 4º grau. "Durante três séculos, buscou-se um processo de resolução para equações de grau 5 ou superior através de radicais" (p. 234). Abel e Galois demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver as equações de 4º e 5º graus. Porém, não é por não possuir

uma fórmula geral que não se consegue resolver tais equações. Essa seção destaca algumas situações onde é possível a resolução algébrica para equações de grau maior ou igual a 4. Está dividida em três subseções: a) Equações na forma fatorada; b) Equações na forma $(x-p)^n = q$; c) Equações do 3º grau.

11) Resolução numérica de equações: “Na prática, equações polinomiais genéricas de grau 3 ou superior são resolvidas através de métodos numéricos” (p. 239). Nessa seção os autores destacam o caso que, segundo eles, é o mais comum. É aquele no qual se deseja obter uma raiz real de uma equação. O método chamado *bisseção* é o mais simples, segundo os autores. Esse método supõe *a* e *b* números reais e que $p(a) \square 0$ e $p(b) \square 0$. p certamente possui uma raiz no intervalo [*a*, *b*], porém não se sabe onde. Melhorando a qualidade da estimativa, calcula-se *p*(*m*), onde m é o ponto médio do intervalo [*a*, *b*]. Se $p(m) \square 0$ garante-se a existência de uma raiz no intervalo [*m*, *b*]. Assim, reduz-se a metade o comprimento do intervalo contendo a raiz procurada. O autor destaca que esse processo pode ser repetido indefinidamente o que resultará em aproximações tão exatas quanto desejar-se para a raiz procurada.

São encontrados alguns exemplos da aplicação desse método nas páginas 240 a 244.

29 exercícios sobre “Equações Algébricas” finalizam esse capítulo e o volume 3 da coleção “A Matemática do Ensino Médio”.

Tratando-se de um resumo indicativo, com as principais definições trazidas pelos autores do livro, haverá momentos na leitura do mesmo que se necessita do livro para acompanhar algumas demonstrações, exemplos e explicações mais detalhadas. Espera-se, com este resumo, contribuir para o entendimento e acompanhamento dos conteúdos e definições trazidas nesse volume.

11. LOJKINE, Jean. A revolução informacional. São Paulo: Cortez, 1995.

Revolução informacional: utopia, realidade ou potencialidade?

As abordagens repousam sobre dois campos que se excluem mutuamente: as “utopias” dos engenheiros exploradores das “potencialidades” dos sistemas tecnológicos; segundo, o tempo curto da vida cotidiana nos locais de produção, onde o sociólogo tem o prazer de desmascarar o fosso que separa as belas promessas dos vendedores de materiais ou dos dirigentes de empresa, da “realidade” que é o trabalho precário, a intensificação do trabalho, a divisão entre os ganhadores e os excluídos da “modernização” tecnológica.

As abordagens “sistêmicas” dão continuidade à controvérsia tradicional, alimentando a “racionalidade unívoca das utopias em torno das capacidades organizacionais das Novas Tecnologias da Informação”.

Entre os tipos de tecnologias, tipos de organizações e tipos de gestão as relações são completamente mascaradas e confundidas pelo mito do “taylorismo-fordismo” (TF)..

“Sistêmicas” é o nome que se dá à análises imprecisas ou insuficientes. Exemplificando, entre informações codificadas e informações abertas e que oculta completamente à questão essencial.

Uma informação pode ser aberta a uma relação interativa. Será muito mais rica, porém ao mesmo tempo, permanecer parcelada e pontual, em um grupo de produção autônomo; ou pode envolver a estratégia da empresa e um outro “pequeno grupo” informal, o de dirigentes de uma firma multinacional. Contudo, o raciocínio tem a simplicidade da evidência: juntamente com “tecnologias idênticas”.

Constata-se que as organizações do trabalho se distribuem numa escala universal segundo sua proximidade ou afastamento em relação ao modelo “taylorista-fordista”. Tecnologias mais avançadas que outras se vinculariam a organizações mais “tayloristas” (taylorismo assistido por computador) que certas organizações de montagem manual, como a da Volvo-Kalmar. Não haveria nenhuma evolução demonstrável entre a implantação de tecnologias flexíveis e as formas de organização de trabalho.

A palavra taylorismo conheceu tantas extensões e diversificações que ela pode designar a parcelarização e a cronometragem das tarefas, quer a separação entre concepção e execução, quer um tipo de relação salarial, uma forma de disciplina na fábrica, a produção em massa e a expropriação da habilidade (saber fazer) operária, um modo de exploração do trabalho e de acumulação de capital ou uma ideologia.

Uma abordagem sistêmica da revolução informacional

Mostraremos uma abordagem sintética que denominamos “revolução informacional” acreditando num conceito que nos parece estranho tanto ao determinismo quanto ao indeterminismo tecnológicos: o conceito de forças produtivas.

A noção de forças produtivas contrapõe-se à concepção neutra passiva da “tecnologia” como simples reflexo de uma relação social; força implica de fato uma ação; produtiva implica uma ação de transformação da natureza material. A objetivação crescente de funções intelectuais nas tecnologias da informação, não suprime seu caráter de forças produtivas.

Só seria possível compreender exatamente estes processos contraditórios, o desenvolvimento dessas potencialidades tecnológicas ambivalentes, se se atribui ao conceito de forças produtivas seu pleno sentido operatório. Conceito que se opõe radicalmente, a uma concepção “imparcial” que faz das tecnologias um instrumento passivo, da sociedade ou da força social dominante; concepção que precisamente funda as abordagens “societais” e também “organizacionais” das “novas tecnologias”.

Marx afirma que a força física que o homem põe em movimento para modificar a natureza, a fim de incorporar matérias dando uma forma útil a sua vida, é um valor de uso. Neste sentido, a força produtiva material é inseparável da intenção e do ideal ao qual a vontade humana vai mobilizar o seu corpo.

As forças produtivas sociais não são reduzidas por Marx a formas organizacionais (divisão e combinação social de trabalho), mas estendidas à pesquisa científica e ao emprego de máquinas e meios de comunicação que “aumentam a força produtiva do capital”.

Houve uma premonição concebida por Marx sobre a “fábrica automática”, ou seja, sobre a pesquisa atrás de desenvolvimento da indústria, mas o que ele logicamente em 1867 não pode prever e achou insignificante foi o que hoje no capitalismo está ultrapassando a revolução industrial, que é o desenvolvimento maciço dos serviços não mercantis.

A correlação entre a aquisição humana da tecnicidade manual e da liberação do cérebro demonstra cabalmente a estreita ligação entre a atividade manual e um certo tipo de atividade cerebral; evidentemente não importa qual: capazes de precipitar e de prever a forma de suas armas, os Paleântropos não eram capazes de visualizar “uma seta ou uma azagaia numa massa óssea”.

No interior do comportamento operatório, Leroi-Gourhan distingue três níveis que especificam bem o lugar do trabalho manual: comportamentos automáticos, comportamento maquinal e lúcido, consciente. Assim se delimita melhor o conteúdo da objetivação operada pelo instrumento e a máquina ferramenta e enfim a máquina informática.

Algumas vezes o próprio Marx insistiu sobre o limite de qualquer análise das forças produtivas centradas no instrumento de trabalho. Assim, no seu estudo sobre a revolução industrial, ele cuidou de caracterizar a sua referência à máquina-ferramenta para definir a revolução industrial como sendo, simultaneamente, essencial e parcial. Evidentemente, caracterizar a revolução industrial pela novidade do instrumento de trabalho – a máquina-ferramenta – é fundamental.

A consideração do modo de combinação social de máquinas e de homens permite salientar a oposição global entre as duas revoluções tecnológicas e desdobrar as características novas, pouco presentes no instrumento de trabalho isolado.

Pode-se então no primeiro passo, destacar três grandes características da revolução industrial: a especialização (com fundamental oposição trabalho manual / trabalho intelectual); a estandardização e a reprodução rígida (continuidade da cadeia).

Num segundo passo, pode-se opor rigorosamente a este complexo sistêmico, três características maiores da revolução informacional: a verdadeira polivalência, a flexibilidade e a estrutura de redes descentralizadas.

Assim, ao encadeamento rígido e contínuo das engrenagens e das máquinas da revolução industrial se opõe a autorregulação dos sistemas flexíveis da automação.

Dois grandes aspectos sociológicos podem ser vinculados à revolução industrial. Trata-se, primeiramente da oposição entre os assalariados dos serviços (produtivos e improdutivos). Agora é possível tentar uma comparação entre revolução industrial e revolução informacional.

Possíveis e impossíveis tecnológicos

A organização das forças produtivas humanas, apesar da sua estreita imbricação, não se confunde com o seu "invólucro" social (capitalista). Ou seja, as características tecnológicas do maquinismo bem como a da automação, não se confundem com o seu modo de utilização capitalista.

Para o capital, o desenvolvimento do maquinismo é somente uma maneira particular de produzir mais-valia relativa: Como qualquer desenvolvimento da força produtiva do trabalho, o emprego capitalista de máquinas visa a diminuir o preço das mercadorias, a reduzir o preço da parcela da jornada em que o operário fica para si mesmo, a fim de ampliar aquela em que trabalha apenas para o capitalista. O critério determinante desta medida capitalista da produtividade do trabalho é a taxa de substituição do trabalho pelo capital do trabalho vivo pelo trabalho morto.

Congregando pequenas unidades de trabalho cabe razão a A. Cottereau, quando insiste sobre os efeitos da "organização coletiva do trabalho" que não podem ser mensurados pela produtividade física individual dos assalariados a domicílio: externalização do capital, flexibilidade sazonal, baixos custos de manutenção, circulação da informação profissional permitindo trocas de pedidos quase instantâneas entre diferentes especialidades.

Apesar de tudo é preciso notar que estas alternativas organizacionais não afetam o fundamento capitalista da mecanização, que é a divisão entre trabalho manual e trabalho intelectual, fabricação e concepção.

Concluindo: se se comparam as formas mais extremas de crescimento do trabalho manual, como as estudadas por Bernoux e Ruffier em 1974, com os níveis atuais de poli funcionalidade entre os chefes de instalações automatizadas, constata-se que a diferença essencial provém da parte crescente assumida pelo trabalho informacional.

Além da automação, centrada na indústria ou, mais amplamente, na objetivação de informações de primeiro nível ligadas à direção e à regulação de sistemas de máquinas, a revolução informacional prioriza todas as atividades humanas com o problema do controle social de massas enormes de informação, liberadas pela conjunção da informática e das telecomunicações. Não se trata apenas de uma revolução informática, mas de uma revolução da informação.

Máquinas para informar ou instrumentos para pensar

Levando em consideração que a revolução da máquina-ferramenta permaneceu dominada pelas atividades industriais, a revolução informacional prioriza as funções informacionais.

Não se podem negar os novos constrangimentos que a revolução informacional coloca à organização e aos critérios de gestão das empresas capitalistas.

A automatização do tratamento de dados não provocará nenhuma modificação na estrutura tripartite fundamental e inerente, segundo Simon, a toda organização. Trata-se da divisão entre: as tomadas de previsão não programadas, reservadas aos dirigentes; as tomadas de decisão programadas, reservadas aos quadros intermediários, encarregados da gestão do cotidiano; os processos de base do trabalho (a fabricação, a execução), reservados aos operadores excluídos de toda tomada de decisão.

O que nos falta saber é se a inteligência humana pode ser simulada por um aparelho construído segundo uma lógica binária, discreta incapaz de apreender especialmente o conjunto de processos analógicos que supõem a continuidade, mas também as rupturas diacrônicas, a contradição, a ambivalência e a ambiguidade.

Até agora temos raciocinado como se o instrumento único da revolução informacional fosse a informática. Existem outras tentativas para objetivar as funções da inteligência humana, em primeiro lugar a cibernética.

O impacto da cibernética e mais amplamente, dos tratamentos aleatórios da informação, não acabou com o paradigma mecanicista que continua dominando empresas e administrações em todos os países capitalistas desenvolvidos. Se o homem, à maneira de um computador, é apenas um sistema de tratamento sequencial da informação, então ele não difere de uma máquina, qualquer que seja esta, e toda a atividade intelectual pode reduzir-se a um sistema arborescente, composto de sub sistemas interligados, cada um deles constituindo-se, por seu turno, de estruturas arborescentes, até que se atinja o mais baixo nível dos sistemas elementares.

Informação e poder Revolução informacional e Revolução organizacional

Esta discussão se encontra na utilização que se fez conceito de retroação, nascido da teoria da informação e da cibernética, para explicar as regulações sociais e organizacionais.

O que nós não sabemos exatamente, "em que condições, em que circunstâncias, como e por que as tensões até então desenvolvidas no interior de um sistema que elas deveriam reforçar, tornam-se tão difíceis de absorver e pressionam o próprio sistema a se transformar ou mesmo desaparecer".

Toda tentativa de modificação das regras pelo alto, provoca o reforço do bloqueio comunicacional, o aumento dos acidentes e, finalmente um acréscimo da centralização das decisões, cada vez mais afastadas dos espaços a que se referem.

Transformando assim num tipo de "espião", o sistema de informação integrado provocará uma reação geral de recolhimento, de apatia frente a um controle cada vez mais asfixiante, detonando uma espiral de desconfiança entre categorias profissionais e reforçando a centralização do controle informático para descobrir as falhas do sistema.

Segundo S. Zuboff, cujo entusiasmo, em face das potencialidades das Novas Tecnologias da Informação, é notável: " A organização das empresas evoluirá progressivamente, passando de pirâmide a algo semelhante a forma de diamante – evolução pressionada pela simples diminuição do número de si.

Na era da sociedade da informação, competitividade das empresas está hipotecada a inteligência dos assalariados e sua iniciativa. A capacidade nominal de uma máquina e a cronometragem das tarefas, nada significa quanto a eficácia produtiva. A nova produtividade, denominada global, depende inteiramente, da qualidade da nova relação, homem/máquina, capital/trabalho. Se nessa relação houver recusa, resultante será a perda de competitividade.

A informação é uma mercadoria?

A tese da "industrialização" da informação conduz, bem ou mal, a identificar o tratamento da informação com o tratamento da matéria na grande indústria capitalista. A tese da industrialização da informação tem seus defensores que reconhecem o que sempre diferenciou o trabalho burocrático mais aborrecido do trabalho industrial em série.

Várias coisas foram nitidamente melhoradas e aperfeiçoadas na administração burocrática, como rapidez, o manejo de documentos, discrição, operada por funcionários individualmente instruídos.

É essencial no desenvolvimento informacional, a sua especificidade em relação não só a produção material, mas também, a produção de mercadorias.

A exceção das seções de mecanografia, que configuram uma espécie de "enclave" nos escritórios, o tratamento da informação, neles não é regido por Taylor, mas por Fayol, que opõe à parcelarização das tarefas operárias, a "formação específica", que permitiria aos agentes superiores e mesmo inferiores das empresas "adquirirem as capacidades administrativas".

A dificuldade deriva menos da complexidade dos serviços do que da tendência a avaliá-los exclusivamente de um ponto de vista unilateral, o do valor mercantil, sem considerar a contradição crescente entre seus valores de uso e as tendências privativas, elitistas, uniformizadas e empobrecedoras, contidas nos critérios de avaliação mercantis e capitalistas de eficácia econômica.

A tendência a economizar o tempo de trabalho necessário, compulsório, para desenvolver o tempo social não compulsório é a característica dessas sociedades do dom. A originalidade atual das normas de eficácia social nos serviços e nos setores onde domina o tratamento da informação esclarece o significado dessas sociedades do dom / contra dom. Mas a abordagem não redutora de sociedades dominadas por relações interpessoais, pode nos favorecer na melhor apreensão da originalidade das mutações sociológicas que, hoje, questionam as normas e os critérios da avaliação mercantil da eficácia econômica.

O avanço não mercantil nos serviços

Mauss e Polany tiveram o mérito de confrontar um tipo de serviços não mercantis, então em pleno desenvolvimento (dos fundos sociais privados nas empresas aos serviços públicos de segurança social, de saúde, de educação, etc.), com o modo de funcionamento dessas “sociedades de serviços” tão particulares que são as sociedades primitivas e as de tipo feudal.

É compreensível que se torne inútil esperar da mera junção de normas mercantis uma modificação decisiva do jogo de forças do mercado em proveito de normas não mercantis ou mistas (mas predominantemente não mercantis). Não há equivalência não mercantil, e quem diz equivalência diz medida quantitativa entre duas grandezas cardinais idênticas que podem ser trocadas, por oposição às medidas ordinais de hierarquias (papeis, estatutos, mas também níveis numa ordem).

A igualdade simétrica entre estrategistas-calculadores cede lugar, assim pouco a pouco, a uma dessimetria radical entre os pesquisadores e os representantes do poder político e financeiro. O pesquisador “recrutador” cede, assim, lugar a um empregado “recrutado”, que trabalha sobre questões industriais e militares.

A serenidade do pesquisador em seu laboratório não depende, apenas, de contratos obtidos diariamente, mas de recursos (públicos? privados? mistos?) próprios do laboratório, que podem permitir, especialmente, uma diversificação das orientações de pesquisa e oferecer uma verdadeira independência aos outros pesquisadores que não querem trabalhar sobre ordens do patrão-representante.

Para a sociologia da ciência, é grande a tentação de recorrer a metáfora econômica, de estabelecer um paralelo entre mercado econômico e instituição ou campo científico.

Inovar supõe “novas exigências de informação, de explicação, de negociação, que contam com a prática tradicional, na qual urgência ou fato consumado são em geral, as únicas justificações das decisões da administração pessoal”, exigências que questionam a divisão (mercantil) entre os que concebem e os que executam, os que realizam a síntese abstrata e os especialistas de saberes concretos.

Isto acontece com as metáforas mecanicistas, referentes ao modelo da máquina, da qual o autômato é a figura emblemática. Para transformar o conjunto constituído pela justa posição de aliados em todo coerente, o meio mais simples é o de “conectar entre si as forças reunidas, isto é construir uma máquina”.

As redes da tecno-ciências fazem emergir relações não mercantis (partilha da informação, ao invés da sua apropriação privada), ou mistas (coordenação estatal de empresas privadas), que nada têm a ver com o mito do “mercado”. Vale o mesmo para a terceira dimensão metafórica da tradução científica: o cálculo mercantil. Ou mais exatamente: a referência mítica ao mercado como norma suprema do trabalho das redes tecno-científicas se mostra incapaz de dar conta do divórcio entre o horizonte a curto prazo do lucro da rentabilidade e do horizonte a longo prazo da inovação.

12. MLODINOW, Leonard. A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

APRESENTAÇÃO

Neste texto, buscou-se compor uma síntese das principais temáticas levantadas na obra de Mlodinow, a qual tem como eixo a história da geometria, desde as primeiras ideias surgidas, até os desdobramentos mais emocionantes das teorias que cercaram o ambiente “construtivo” da geometria, e isso tudo por meio da ”*janela de Euclides*”.

INTRODUÇÃO

Conta a história que um grego estava de pé na orla marítima observando os navios desaparecerem na distância. De todos os navios, o casco parecia sumir primeiro, depois mastros e velas. *Aristóteles* percebeu, de forma genial, que isso era um sinal de que a Terra é curva.

Para observar a estrutura de nosso planeta em grande escala, Aristóteles tinha olhado através da janela da geometria.

Ao longo dos séculos, a genialidade e a geometria nos ajudaram a vislumbrar além de nossos horizontes. O que podemos provar sobre o espaço? Como sabemos que estamos aqui? O espaço pode ser curvo? Quantas dimensões existem? Como a geometria explica a ordem natural e a unidade do Cosmos? Essas são as perguntas que estão por trás das cinco revoluções geométricas da história mundial.

Tudo começou com um pequeno esquema planejado por *Pitágoras*: empregar a matemática como o sistema abstrato de regras que pode modelar o universo físico. Depois veio um conceito de espaço diferente do chão sobre o qual pisamos, ou da água em que nadamos. Foi o nascimento da abstração e da demonstração. Logo, os gregos pareciam ser capazes de achar respostas geométricas para toda questão científica.

Mas a civilização grega entrou em declínio e os romanos conquistaram o mundo ocidental. E, assim que a civilização emergiu novamente, a geometria também reapareceu, mas era um novo tipo de geometria.

Renè Descartes casou a geometria com os números. Com a sua ideia de coordenadas, lugar e forma podiam ser manipulados como nunca tinham sido antes, e o número podia ser visualizado geometricamente. Estas técnicas permitiam o surgimento do cálculo (diferencial integrado) e o desenvolvimento da tecnologia moderna.

Graças a Descartes, os conceitos geométricos, tais como coordenadas e gráficos, senos e co-senos, vetores e tensores, ângulos e curvaturas, aparecem em todos os contextos de física – da eletrônica do estado sólido à estrutura em grande escala do espaço-tempo; da tecnologia dos transistores e computadores aos raios laser e à viagem espacial. Mas a obra de Descartes também permitiu o surgimento de uma ideia mais abstrata – e revolucionária – a ideia do espaço curvo.

Será realmente a soma dos ângulos de todos os triângulos igual a 180 graus, ou isso somente é verdade se o triângulo estiver sobre uma folha de papel plana?

A matemática do espaço curvo provocou uma revolução nos fundamentos lógicos, não somente da geometria, mas de toda a matemática. Também tornou possível a teoria da relatividade de *Einstein*. A teoria geométrica de Einstein do espaço e daquela dimensão extra, o tempo, e da relação entre o espaço-tempo e a matéria e a energia representou uma mudança de paradigma de uma importância imensa, jamais vista na física desde Newton.

Em junho de 1984, um cientista anunciou que tinha rompido as barreiras na teoria que explicaria tudo. Esse homem acreditava que a chave para a compreensão da unidade e da ordem do universo está na geometria – uma geometria de natureza nova e bem estranha.

John Schwarz trabalhou durante quinze anos numa teoria chamada teoria das cordas, em relação à qual a maioria dos físicos reagiu da mesma maneira que alguém reagiria a uma pessoa estranha com expressões de maluco pedindo dinheiro na rua.

Hoje, a maioria dos físicos acredita que a teoria das cordas está correta: a geometria do espaço é responsável pelas leis físicas que governam o que existe dentro do espaço.

O manifesto da revolução original da geometria foi escrito por um homem misterioso chamado *Euclides*. Todos já ouvimos falar na chamada geometria euclidiana.

Com seu livro *Os elementos,* Euclides abriu uma janela através da qual a natureza de nosso universo tem sido revelada. E à medida que sua geometria passou por mais quatro revoluções, os cientistas e matemáticos abalaram as crenças dos teólogos, destruíram as preciosas visões de mundo dos filósofos, nos forçaram a reexaminar e imaginar de novo o nosso lugar no Cosmos.

CAPÍTULO 1 - A HISTÓRIA DE EUCLIDES

A PRIMEIRA REVOLUÇÃO

Euclides foi um homem que, possivelmente, não descobriu uma só lei importante da geometria. No entanto, ele é o mais famoso geômetra já conhecido, e por boas razões: foi através de sua janela que, durante milênios, as pessoas olharam primeiramente quando contemplaram a geometria.

Os gregos foram os primeiros a perceber que a natureza poderia ser entendida usando-se a matemática – que a geometria poderia ser aplicada para revelar, não apenas para descrever.

Desenvolvendo a geometria a partir de descrições simples de pedra e areia, os gregos extraíram as ideias de ponto, linha e plano. Retirando a cortina que encobria a matéria, eles revelaram uma estrutura possuidora de uma beleza que a civilização nunca tinha visto antes.

No clímax desta luta para inventar a matemática destaca-se Euclides. A história de Euclides é uma história de revolução. É a história do axioma, do teorema, da demonstração, a história do nascimento da própria razão.

A GEOMETRIA DOS IMPOSTOS

A humanidade pré-grega tinha noção de muitas fórmulas eficientes, truques de cálculo e de engenharia, mas como nossos líderes políticos, eles, algumas vezes, realizavam surpreendentes feitos com impressionante pouca compreensão do que estavam fazendo. Eram construtores trabalhando no escuro, tateando, descobrindo o seu caminho, levantando uma estrutura aqui, colocando um piso ali, alcançando o propósito sem jamais ter alcançado a compreensão do processo. Entretanto, os gregos não foram os primeiros. Os seres humanos vêm contando e fazendo cálculos, cobrando impostos e dando troco de menos entre si bem antes dos tempos históricos registrados.

Algumas ferramentas consideradas de computação datadas de 30.000 a.C. podem ser varas decoradas por artistas com sensibilidades matemáticas intuitivas. Nas margens do lago Edward, na atual República Democrática do Congo, arqueólogos descobriram um pequeno osso, de 8 mil anos, com uma pequeníssima pedra de quartzo presa num entalhe em uma das extremidades.

O seu criador entalhou três colunas de cortes em um dos lados do osso. Os cientistas acreditam que esse osso, chamado de osso Ishango, provavelmente seja o mais antigo exemplo já encontrado de um dispositivo para registro numérico.

O pensamento de fazer operações com números surgiu muito mais tarde, porque fazer cálculos aritméticos exige certo grau de abstração. Os primeiros passos principais nesta direção foram tomados no sexto milênio a.C., quando as pessoas do vale do Nilo começaram a abandonar a vida nômade e a se concentrar no cultivo do vale. A inundação do vale durava quatro meses a cada ano. Os oito meses secos eram divididos em duas estações, a *perit* para o cultivo e a *shemu* para a colheita.

Já em 3500 a.C., os egípcios tinham dominado uma indústria de pequena escala de trabalhos manuais e metalurgia. Por volta desta época, eles também desenvolveram a escrita. A cobrança de imposto foi, talvez, o primeiro imperativo para o desenvolvimento da geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os indivíduos em particular possuíam imóveis. O governo determinava os impostos da terra baseado na altura de enchente do ano e na área de superfície das propriedades.

Pedir empréstimos era possível, mas a taxa de juros era baseada numa filosofia do "sejamos práticos": 100% ao ano. Os egípcios desenvolveram métodos bastante confiáveis, embora tortuosos, para calcular a área de um quadrado, de um retângulo e de um trapezoide. Para achar a área de um círculo, eles consideraram semelhantes a um quadrado de lados iguais a 8/9 do diâmetro. Isto é equivalente a usar para PI um valor de 256/81, ou 3,16, uma estimativa alta, mas com o erro de apenas 6,6%.

Os egípcios empregaram seu conhecimento matemático para fins impressionantes. Imagine um deserto desolado, varrido pelo vento, no ano de 2580 a.C. o arquiteto tinha desenrolado um papiro com o projeto de sua estrutura. Seu trabalho era fácil – base quadrada, faces triangulares – e, bem, tinha que ter 145 metros de altura, e deveria ser feita de sólidos blocos de pedras pesando mais de duas toneladas cada.

Ao construir esta pirâmide, um único grau de desvio da verdadeira direção, e milhares de toneladas de pedras, e milhares de anos-pessoa de trabalho mais tarde, centenas de metros no ar, as faces triangulares de sua quase pirâmide se desencontrariam, formando não um vértice, mas um espigão malfeito de quatro pontas.

Na realização de seus levantamentos topográficos, os egípcios se utilizavam de uma pessoa chamada de *harpedonopta*, que significa literalmente "um esticador de corda". O *harpedonopta* empregava três escravos que seguravam a corda para ele. A corda tinha nós em determinadas distâncias de modo que, ao estendê-la esticada, com os lados de comprimentos determinados, formava ângulos de medidas determinadas. Por exemplo, se esticarmos uma corda com nós às distâncias de 30, 40 e 50 metros, obteremos um ângulo reto entre os lados de 30 e 40 metros. (originalmente a palavra *hipotenusa* significava, em grego, "o que foi esticado contra".) hoje, diríamos, os esticadores de corda não formavam linhas, mas curvas geodésicas em toda a extensão da superfície da terra. Este é exatamente o método, ainda que numa forma imaginária, extremamente pequena (tecnicamente, "infinitesimal"), que empregamos hoje para analisar as propriedades locais do espaço no campo da matemática conhecida como geometria diferencial. E é o teorema de Pitágoras, cuja veracidade é o teste do espaço plano.

Na região entre os rios Tigre e Eufrates, durante o 4º milênio a.C. por volta de 2000 e 1700 a.C., os povos não-semíticos vivendo bem ao norte do golfo Pérsico conquistaram seus vizinhos do sul. Hamurábi, seu soberano vitorioso, deu ao reino unido o nome da cidade de Babilônia. Nós atribuímos aos babilônios um sistema de matemática consideravelmente mais sofisticado do que aquela dos egípcios.

Os babilônicos não escreveram equações. Todos os seus cálculos eram expressos como enigmas. Por exemplo, uma tabuinha de argila continha o seguinte enigma: "Quatro é o comprimento e cinco a diagonal. Qual é a largura? O seu tamanho não é conhecido. Quatro vezes quatro é dezesseis. Cinco vezes cinco é vinte e cinco. Você tira dezesseis de vinte e cinco e sobram nove. Qual número eu devo multiplicar para obter nove? Três vezes três é nove. Três é a largura.” Hoje nós escreveríamos “$x^2=5^2 – 4^2$”. A desvantagem de formulação retórica de um problema não é a sua falta de concisão, mas o fato de a prosa não poder ser manipulada como pode uma equação, e as regras de álgebra, por exemplo, não são aplicadas facilmente.

Levou milhares de anos antes que esta limitação, em particular, fosse remediada: o uso mais antigo conhecido é o teorema de Pitágoras, que para um ângulo reto, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Parece que os egípcios também conheciam esta relação, mas os escribas babilônicos encheram suas tabuinhas de argila com tabelas impressionantes de sequências de trincas, exibindo essa relação. Por exemplo, nos primeiros doze números 1, 2, ..., 12, há centenas de maneiras de escolher trincas diferentes; de todas, elas somente a trinca 3, 4, 5 satisfaz o teorema de Pitágoras. Podemos concluir que os babilônicos conheciam pelo menos o suficiente da teoria dos números para gerar esses trios.

Apesar dos feitos dos egípcios e da engenhosidade dos babilônios, a contribuição deles para a matemática limitou-se a fornecer aos gregos posteriores uma coleção de fatos matemáticos concretos e regras práticas. Eles eram mais parecidos com os biólogos de campo clássicos, catalogando pacientemente as espécies, do que com os geneticistas modernos que procuram ganhar uma compreensão de como o organismo se desenvolve e funciona. Por exemplo, embora as duas civilizações conhecessem o teorema de Pitágoras, nenhuma analisou a lei geral que hoje escrevemos como $a^2+b^2=c^2$ (onde c é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, e a e b os comprimentos dos outros dois lados).

ENTRE OS SETE SÁBIOS

A descoberta de que a matemática é mais do que algoritmos para calcular o volume de entulho ou o valor dos impostos é creditada a um comerciante grego, que virou filósofo, chamado Tales, há pouco mais de 2.500 anos. Foi ele quem preparou o cenário para as grandes descobertas dos pitagóricos e, por fim, para os *Elementos* de Euclides. Ele viveu numa época quando, ao redor do mundo, uma luz iluminava, de um jeito ou de outro, despertando a mente humana.

Tales teve a sede insaciável pelo conhecimento, característica de tantos gregos que moldaram sua Idade de Ouro. Nas suas viagens à Babilônia, ele estudou a ciência e a matemática da astronomia e ganhou fama local ao trazer este conhecimento para a Grécia. Um dos efeitos legendários de Tales foi ter anunciado o eclipse solar no dia 28 de maio de 585 a.C. Heródoto, o historiador, relata que esse eclipse aconteceu durante uma batalha entre os lídios e os persas, interrompendo a luta, e trouxe paz duradoura.

Durante um longo tempo, no Egito, onde os egípcios tinham a capacidade de construir pirâmides, mas não o discernimento necessário para medir a sua altura, Tales foi capaz de deduzir técnicas geométricas, uma da outra, e de roubar a solução de um problema a partir de outro, pois tinha extraído o princípio abstrato da aplicação prática particular.

Na Grécia, foi nomeado pelos seus contemporâneos como um dos Sete Sábios, os sete homens mais sábios do mundo. Tales deu os primeiros passos para a sistematização da geometria. Ele foi o primeiro a demonstrar os teoremas geométricos do tipo que, séculos mais tarde, Euclides juntaria nos seus *Elementos.*

Ele também inventou o primeiro sistema de raciocínio lógico. Sendo o primeiro a considerar o conceito de congruência de figuras espaciais – que duas figuras num plano podem ser consideradas iguais se você puder deslizar e girar uma para coincidir exatamente com outra. Estender a ideia de igualdade numérica para objetos espaciais, o que foi um salto gigantesco na matematização do espaço. Deu nome egípcio de "medida da terra" para a sua matemática, mas sendo grego, usou a palavra grega *geometria.*

Este estudioso afirmava que, pela observação e raciocínio, deveríamos ser capazes de explicar tudo o que acontece na natureza. Chegou à conclusão de que a natureza segue leis regulares. Também trabalhou com o conceito de espaço físico, reconheceu que toda matéria no mundo apesar de sua imensa variedade, deve ser feita, intrinsecamente, da mesma coisa.

Quando Tales era um frágil homem velho, temeroso de sua própria senilidade, encontrou o mais importante precursor de Euclides – Pitágoras de Samos. Samos era uma cidade numa grande ilha do mesmo nome, no mar Egeu, não muito distante de Mileto. Quando tinha 20 anos, Pitágoras viajou para Mileto, onde encontrou Tales.

Pouco se sabe do que Tales realmente disse a Pitágoras, mas certamente ele foi uma grande influência sobre este jovem gênio. Todos os relatos antigos do encontro concordam num ponto: Tales deu a Pitágoras a sugestão de Horace Greeley, mas em vez de mandar o jovem rapaz para o oeste, Tales recomendou o Egito.

A SOCIEDADE SECRETA

Pitágoras aceitou a recomendação de Tales de ir para o Egito, mas lá chegando notou que os objetos geométricos eram concretos. Uma linha era a corda que o *harpedonopta* (o esticador de corda) arrastava, ou a borda de um campo. Um retângulo era o limite de um pedaço de terra, ou a face de um bloco de pedra. O espaço era lama, solo e ar.

Conforme a lenda, um dia Pitágoras estava passando pela oficina de um ferreiro, quando ouviu o som de vários martelos golpeando uma grande bigorna. Isso o fez pensar. Após algumas experiências com cordas, ele descobriu as progressões harmônicas, e a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e a altura da nota musical que ele produz. Em ciência, a lei da harmonia de Pitágoras representa igualmente uma pedra fundamental, o primeiro exemplo do mundo físico descrito em termos matemáticos.

Para Pitágoras, muito daquilo que a matemática tinha de intrigante veio dos muitos padrões numéricos que ele e seus seguidores descobriram. Os pitagóricos imaginaram os números inteiros como pedrinhas ou pontos, dispondo-as em certos padrões geométricos. Descobriram que alguns números podem ser formados arrumando as pedrinhas igualmente espaçadas em duas colunas de dois, três colunas de três, e assim por diante, de modo que a disposição formasse um quadrado.

Os pitagóricos denominaram quaisquer números de pedrinhas que arrumássemos desta maneira "números quadrados", e é por isso que hoje em dia chamamos esses números de "quadrados": 4, 9, 16 etc. Eles descobriram que esses números podiam ser formados dispondo as pedrinhas em colunas de um, dois, três, e assim por diante, formando triângulos: 3, 6, 10, etc.

As propriedades dos números quadrados e triangulares fascinaram Pitágoras. Enquanto os números quadrados são todos iguais à soma de todos os números ímpares consecutivos. Pitágoras percebeu que, do mesmo modo, os números triangulares são a soma de todos os números consecutivos, tanto pares como ímpares. E que os números quadrados e triangulares estão relacionados; se adicionamos um número triangular anterior ou próximo, obteremos um número quadrado.

O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado usando-se um tipo de multiplicação geométrica que ele usava frequentemente. Não sabemos se foi assim que demonstrou esse teorema, mas demonstrar desta maneira é significativo porque é puramente geométrico. A demonstração geométrica não é difícil; é realmente apenas uma versão distorcida pelos matemáticos para uma atividade infantil de "ligue os pontos para formar a figura".

Para demonstrar o teorema de Pitágoras de maneira geométrica, o único fato computacional que precisamos é que a área de um quadrado é igual ao quadrado de um dos lados. Isso é apenas uma reformulação moderna da analogia das pedrinhas de Pitágoras. Dado qualquer triângulo retângulo, o objetivo é formar três quadrados deles: um quadrado cujos lados correspondam, em comprimento, aos outros dois lados do triângulo. A área de cada um desses três quadrados é então o quadrado do comprimento de um dos lados do triângulo. Se pudermos mostrar que área do quadrado da hipotenusa é igual à combinação das áreas dos outros dois quadrados, teremos então demonstrado o teorema de Pitágoras.

Refletindo sua filosofia fundamental, os pitagóricos inventaram o termo *matemática, do grego mathema, que significa "ciência*". A origem da palavra reflete a relação próxima entre os dois assuntos, embora hoje exista uma distinção nítida entre matemática e ciência, uma distinção que não se tornou clara até o século 19.

A reverência de Pitágoras pelas relações numéricas o levou a formular muitas crenças numerológicas místicas. Ele foi o primeiro a dividir os números nas categorias de "pares" e "ímpares", mas foi mais adiante personificando-os: os ímpares ele chamou de "masculino" e os pares de "femininos". Ele associou números específicos com ideias – o número 1 com a razão, o 2 com a opinião, o 4 com a justiça. Com o número 4 no sistema era representado por um quadrado, o quadrado foi associado com a justiça.

Pitágoras foi uma figura carismática, e um gênio, mas ele também era bom em se autopromover. No Egito, ele não somente aprendeu geometria egípcia, mas tornou-se o primeiro grego a aprender hieróglifos egípcios e, por fim, tornou-se sacerdote egípcio ou algo equivalente, iniciado nos seus ritos sagrados. Isso lhe deu acesso a todos os mistérios egípcios, chegando até aos aposentos secretos de seu templo.

Permaneceu por 13 anos no Egito, quando partiu, não por sua própria vontade – os persas invadiram o Egito e o levaram como prisioneiro. Pitágoras chegou à Babilônia, onde obteve sua liberdade posteriormente, e também ganhou um conhecimento completo da matemática babilônica. Finalmente, voltou a Samos com 50 anos de idade. Quando Pitágoras voltou para sua terra, tinha sintetizado a filosofia do espaço e da matemática que pretendia pregar; tudo o que precisava era de alguns seguidores.

O MANIFESTO DE EUCLIDES

Euclides nasceu por volta de 300 a.C. na Alexandria. Tudo o que se sabe é que ele abriu uma escola em Alexandria, teve alunos brilhantes, desprezou o materialismo, parecia ser uma pessoa agradável. Escreveu pelo menos dois livros. Um deles, um livro perdido sobre cônicas – estudo de curvas geradas pela interseção de um plano e um cone. Formou, mais tarde, a base da importante obra de Apolônio, que fez progredirem substancialmente as ciências da navegação e a astronomia.

Os Elementos é um dos textos mais amplamente lidos de todos os tempos, tem uma história digna do enredo de *O falcão maltês.* Em primeiro lugar, não é um livro, mas uma série de 13 rolos de pergaminhos. Nenhum dos originais sobreviveu, mas foram transmitidos mais tarde através de uma série de cópias as quais desapareceram quase que completamente na Idade das Trevas. Os primeiros quatro rolos da obra de Euclides não são de maneira alguma o original de *Os elementos:* um erudito chamado Hipócrates (não o pai da medicina) escreveu um trabalho intitulado "Os elementos" (400 a. C.) Euclides teve um papel de organizador e sistematizador da geometria conforme compreendida pelos gregos.

A maior e importante contribuição de *Os Elementos* foi o seu método lógico inovador: primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo assim a compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos apresentado de forma clara os axiomas ou postulados (estes termos são intercambiáveis) de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não declarados. Finalmente, deduzir as consequências lógicas do sistema, empregando somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados.

A matemática é um edifício vertical, que diferentemente de um alto edifício, cairá se apenas um tijolo matemático estiver corrompido. Se for permitida mesmo a falácia mais inócua no sistema, não poderemos confiar em mais nada. De fato, um teorema da lógica afirma que, se for admitido qualquer teorema falso num sistema lógico, não importando a que ele se refira, seremos capazes de usá-lo para demonstrar que 1 é igual a 2.

O objetivo de Euclides era que o seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas, baseadas na intuição, em conjeturas e na inexatidão. Ele formulou 23 definições, cinco postulados geométricos e cinco postulados adicionais que chamou de *noções comuns*. A partir dessa base, ele demonstrou 465 teoremas, isto é, todo o conhecimento geométrico de seu tempo. As definições de Euclides incluíam termos como *ponto, linha* (que na sua definição poderia ser curva), *linha reta, círculo, ângulo reto, superfície e plano.*

Sobre linhas paralelas, ele escreveu: são "linhas retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se encontraram uma com a outra em nenhuma direção". Um círculo é "uma figura plana contida por uma linha, [isto é, uma curva] tal que todas as linhas retas que vão até ela de certo ponto de dentro do círculo [chamado de centro] são iguais entre si". E, sobre ângulo reto, fez a seguinte afirmativa: "quando uma linha reta colocada sobre uma linha reta faz com que os ângulos adjacentes sejam iguais entre si, cada um desses ângulos retos é um ângulo reto".

O conteúdo geométrico do fundamento da geometria de Euclides reside nos seus cinco postulados. Os quatro primeiros são simples e podem ser enunciados com certa graciosidade. São eles:

7- *Dados quaisquer dois pontos, pode ser traçada uma linha tendo estes pontos como suas extremidades.*
8- *Qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção.*
9- *Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto no centro.*
10- *Todos os ângulos retos são iguais.*

11- Dada uma linha que cruze duas linhas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado da linha)

O quinto postulado de Euclides, chamado de *postulado das paralelas,* não parece tão óbvio ou intuitivo como os demais. É invenção do próprio Euclides, não é parte do grande corpo de conhecimento que ele estava resumindo. Tudo indica que ele não gostava desse postulado, pois evitava usá-lo sempre que possível. Os matemáticos posteriores também não gostaram dele, sentindo que não foi o suficientemente simples para um postulado, e deveria ser demonstrável como um teorema.

UMA BELA MULHER, UMA BIBLIOTECA E O FIM DA CIVILIZAÇÃO

Euclides foi o primeiro grande matemático de uma longa e, infelizmente, condenada linha de estudiosos que trabalharam em Alexandria. Após uma decisiva derrota, os líderes atenienses aceitaram a paz nos termos de Felipe II em 338 a.C., quando, Felipe II foi esfaqueado mortalmente por um de seus guarda-costas. Seu filho Alexandre, o Grande, que tinha 20 anos, assumiu o comando.

Alexandre deu grande valor ao conhecimento, no que a geometria desempenhava importante papel. Respeitava as culturas estrangeiras, embora aparentemente não respeitasse a independência delas. Logo conquistou o resto da Grécia, o Egito e o Oriente Próximo, até a Índia, vindo a casar-se com uma mulher persa.

Em 332 a.C., no centro de seu império, Alexandre, começou a construção de sua luxuosa capital, Alexandria. Deveria ser um centro cultural, comercial e governamental. Seu arquiteto as planejou num padrão de grade, uma antecipação curiosa da geometria de coordenadas que não seria inventada durante os próximos dezoito séculos.

Nove anos após ter começado a construção, Alexandre morreu de uma doença desconhecida, antes da conclusão de sua grandiosa cidade. Sua geometria foi apropriada porque a cidade tornou-se o centro da matemática, ciência e filosofia gregas. Um ex-general macedônio chamado Ptolomeu, conquistou a parte egípcia do império de Alexandre. Ptolomeu, após ter assumido o poder, construiu uma grande biblioteca e museu em Alexandria. O museu e a biblioteca fizeram de Alexandria um centro intelectual mundial sem rival, um lugar onde os maiores sábios do antigo império de Alexandre estudaram geometria e espaço.

Em 212 a.C., Eratóstenes de Cirena, o bibliotecário principal de Alexandria, tornou-se a primeira pessoa na história a medir a circunferência da Terra. Seu cálculo causou uma sensação entre seus concidadãos, demonstrando como era pequeno o pedaço do planeta conhecido por sua civilização. Um efeito comparável hoje ao de Eratóstenes que seria o de revelar, pela primeira vez, que o universo não termina nos limites longínquos de nosso sistema solar.

Eratóstenes conseguiu sua compreensão sobre nosso planeta sem ter de se aventurar muito longe. Como Einstein, ele teve sucesso utilizando a geometria. Eratóstenes percebeu que, ao meio-dia, na cidade de Siena, durante o solstício de verão, uma vara cravada [verticalmente] no chão não projeta sombra. Para Eratóstenes, isso significava que uma vara fincada no solo era paralela aos raios de Sol. Imaginando a terra como um círculo, uma reta traçada a partir do seu centro, passando por um ponto no círculo representando Siena e prolongada para fora no espaço será paralela às outras linhas representando os raios solares. Agora, mova-se ao longo do círculo da superfície da Terra para longe de Siena em direção a Alexandria.

O comprimento da sombra em Alexandria e um teorema no livro *Os Elementos* sobre uma linha cruzando duas linhas paralelas foram suficientes para que Eratóstenes calculasse a parte da circunferência da Terra representada pelo arco ao longo da Terra, de Siena a Alexandria. Ele descobriu que isso representava 1/50 da circunferência da Terra.

Utilizando o primeiro assitente de pesquisa graduado, Eratóstenes empregou um homem, cujo nome não sabemos, para andar entre as duas cidades medindo as suas distâncias. Ao voltar, ele relatou devidamente que era cerca de 800 quilômetros; multiplicando isso por 50, Eratóstenes determinou que a circunferência tinha cerda de 40 mil quilômetros, com erro em torno de 4%, uma resposta surpreendentemente exata.

Aristarco de Samos, um astrônomo trabalhando em Alexandria, utilizou o método engenhoso e um pouco intricado, combinando a trigonometria com um modelo simples dos céus para calcular, com uma aproximação razoável, o tamanho da Lua e a sua distância da Terra.

Arquimedes também foi atraído para Alexandrina. Nascido em Siracusa, ele viajou para Alexandrina a fim de estudar na escola real de matemática. Arquimedes foi quem descobriu o princípio da alavanca, como também o princípio da flutuação, e fez muitas outras contribuições à física e à engenharia. Ele elevou a matemática a um nível que não foi ultrapassado até que as ferramentas da álgebra simbólica e da geometria analítica tivessem sido desenvolvidas, uns dezoito séculos mais tarde.

Uma das façanhas matemáticas de Arquimedes foi aperfeiçoar uma versão de cálculo não muito diferente daquele de Newton e Leibniz. Considerando-se a ausência da geometria cartesiana, talvez tenha sido um feito até mais impressionante. Ele acreditou que sua façanha culminante foi à descoberta, por meio daquele método, de que o volume de uma esfera inscrita num cilindro (i.e., uma esfera cujo diâmetro seja igual ao diâmetro e à altura do cilindro) é 2/3 do volume daquele cilindro.

Arquimedes ficou tão orgulhoso daquela descoberta, que pediu que fosse inscrito no seu túmulo um diagrama representando-a. Aos 75 anos foi assassinado por um soldado romano quando estudava um diagrama geométrico que tinha desenhado na areia. Seu túmulo teve a inscrição do diagrama como ele havia desejado.

A astronomia, também, atingiu o seu ápice em Alexandrina com a obra de Hiparco (século 2º a.C.) e Claudio Ptolomeu (século 2º d.C.). Durante 35 anos, este estudioso observou os céus, combinou suas observações com dados babilônicos, para desenvolver um modelo geométrico de nosso sistema solar no qual os cinco planetas conhecidos, o Sol, a Lua, todos se moviam em órbitas compostas de círculos em redor da Terra. Obteve tanto êxito em descrever o movimento do Sol e da Lua vistos da Terra, que pôde prever eclipses lunares com um erro de apenas duas horas.

A cartografia é um assunto altamente matemático por que os mapas são planos, mas a Terra é aproximadamente esférica, e uma esfera não pode ser mapeada numa parte de um plano de modo que represente exatamente as áreas e os ângulos ao mesmo tempo. O livro *Geografia* representou o começo da elaboração séria de mapas.

Quando Roma conquistou a Grécia, os romanos se tornaram protetores da herança grega. Entretanto, seus imperadores não apoiavam a matemática. Nos 1.100 anos de existência, a história não menciona um só teorema romano demonstrado, nem mesmo um matemático romano. Mas eles eram cultos. Escreverem obras adaptadas do conhecimento grego. Boécio, um editor, resumiu obras de Euclides. Mas o fez com substituições de resultados por aproximações e até resultados errados.

O último intelectual a trabalhar na biblioteca em Alexandria foi Hipácia, grande mulher erudita que se conhece na história, filha de um matemático chamado Teón, aprendeu a ciência com seu pai. Ela escreveu comentários importantes sobre duas obras gregas, a *Aritmética*, de Diofanto e as *Seções Cônicas de Apolônio*, que são lidas até hoje. As obras de Hipácia foram todas destruídas. Foi também destruído o que sobrou da biblioteca, que em 391 fora queimada num ataque realizado por cristãos. Em 800 d.C. existiam apenas fragmentos de uma tradução de *Os Elementos* de Euclides. A tradição grega de abstração e demonstração parecia perdida.

Na última fase do período medieval, um grupo de filósofos criou um ambiente que permitiu o aparecimento de grandes matemáticos: Fermat, Leibniz e Newton. Um pensador que esteve no centro da revolução seguinte na geometria e na compreensão de espaço seria René Descartes.

CAPÍTULO 2 - A HISTÓRIA DE DESCARTES

REVOLUÇÃO DO LUGAR

Como nós sabemos onde estamos? Pode parecer que a resposta seja dada pela cartografia. Mas a cartografia é somente o começo. O verdadeiro poder de uma teoria de localização está na habilidade em relacionar locais diferentes, caminhos e formas entre si, e manipulá-las empregando as equações – a unificação da geometria e da álgebra.

É difícil imaginar quais teorias ainda mais grandiosas os astrônomos/físicos Kleper e Galileu poderiam ter criado se as ferramentas da geometria analítica lhes tivessem sido familiares – mas tiveram que se virar sem elas.

Com este conhecimento, Newton e Leibniz, criaram o cálculo e a era da física moderna. Se a geometria e a álgebra tivessem permanecido sem relacionamento, poucos dos avanços da física moderna e da engenharia teriam sido possíveis.

A ORIGEM DA LATITUDE E DA LONGITUDE

Ninguém sabe quem fez os primeiros mapas, nem por quê. Sabemos que alguns primeiros mapas foram criados pelo mesmo motivo que os egípcios criaram a geometria. Esses mapas, simples tabletes de argila, remontam a 2300 a.C. Não havia chaves topográficas ou ornamentações religiosas inscritas neles, mas sim anotações referentes aos impostos sobre propriedades.

À medida que mais almas corajosas começaram a explorar os sete mares, um propósito mais vital dominou a criação de mapas. O desafio mais vital que os marinheiros e exploradores enfrentavam no oceano aberto poderia ter sido o desafio de não se perder. As duas coordenadas usadas para descrever a sua posição atual na superfície da Terra são a latitude e a longitude.

A ideia original da latitude veio de um antigo "meteorologista" chamado Aristóteles. Depois de estudar como a localização na Terra afeta o clima, ele propôs a divisão do globo em cinco zonas climáticas delineadas por uma localização norte/sul. Como a teoria de Aristóteles sugere, podemos determinar nossa latitude, pelo menos em média, pelo clima – a Terra é mais fria nos pólos, e fica quente quando mudamos em direção ao Equador. Um modo melhor de determinar a latitude é olhar as estrelas. Isso é muito simples se você achar uma estrela posicionada no eixo da Terra. Essa estrela existe no hemisfério norte: é Polaris, a "estrela polar".

Em 1700, Isaac Newton inventou o sextante, um dispositivo projetado para facilitar o processo de mirar e medir latitudes desta maneira. No entanto, o viajante encalhado poderia fazer isso à moda antiga, empregando duas varas como se fossem um instrumento para medir ângulos.

Determinar a sua longitude é mais difícil. Adicione à sua imagem mental a outra esfera, muito maior do que a Terra, com a Terra no seu centro. Nesta esfera imagine um mapa de estrelas. Se a Terra não girasse, você poderia medir a sua longitude com referência a esse mapa. Mas o efeito da rotação da Terra faz com que o mapa de estrelas que você vê num momento seja igual ao mapa que uma pessoa um pouco a oeste de você verá algum tempo depois. Para ser mais exato, já que a Terra gira 360 graus em 24 horas, um observador a 15 graus a oeste de você vê a mesma vista que você, uma hora mais tarde.

O primeiro mapa-múndi criado pelos gregos foi desenhado por Anaximandro, aluno de Tales, aproximadamente em 550 a.C. Seu mapa dividia o mundo em duas partes. Por volta de 330 a.C., os gregos estavam até colocando mapas em algumas de suas moedas: uma delas incluía elevações, e é considerada "o primeiro mapa de relevo físico" conhecido.

Os pitagóricos parecem ter sido os primeiros que propuseram que a Terra é uma esfera. Este conhecimento é vital para a elaboração exata de mapas e, infelizmente, teve proponentes poderosos em Platão e Aristóteles, muito antes de Ceratóstomo ter mais ou menos demonstrado isso aplicando um modelo esférico para medir a circunferência da Terra. Depois que Aristóteles propôs sua ideia de dividir o mundo em zonas climáticas, Hiparco inventou a ideia de distanciá-las em intervalos iguais e adicionar linhas norte/sul perpendiculares a elas. Na época de Ptolomeu, cerca de cinco séculos depois de Platão e Aristóteles, e quatro séculos depois de Eratóstenes, foram dados os nomes "latitude" e "longitude" a essas linhas.

Os romanos produziram mapas; porém, assim como o problema de geometria, que focalizava sua atenção nas tropas inimigas do outro lado do rio, esses esforços se focalizaram em problemas puramente práticos, geralmente militares. A geometria e a cartografia acabariam por renascer e ser revolucionadas por uma nova teoria do lugar. Antes que isto pudesse acontecer, tinha de ser realizada uma tarefa muito maior: o renascimento das tradições intelectuais da civilização ocidental.

A HERANÇA DOS ROMANOS DECADENTES

As grandes obras e as tradições dos gregos estavam perdidas e esquecidas. Nessa época um homem poderoso reconheceu a necessidade de mais educação e ditou os passos que levariam ao renascimento da tradição intelectual na Europa.

Carlos Magno se tornou a força dominante na Europa e impôs o catolicismo dominante por onde passou. A Igreja Cristã tornou-se a força motriz do saber. As escolas eclesiásticas que ele criou se espalharam e, por fim, tornaram-se as universidades da Europa. Foram essas universidades que permitiram à Europa reaparecer como uma potência intelectual e a França, como um centro da matemática.

No século 13, Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, trouxe do norte da África a ideia do zero e o sistema numérico árabe-indiano que hoje usamos. O influxo de conhecimento grego antigo alimentou as novas universidades. A ciência era um misto de conhecimento antigo e religião.

O conceito de tempo era vago. O dia era dividido em 12 intervalos iguais baseados no sol. Não existia tecnologia para medir intervalos curtos de tempo, unidades fundamentais como o segundo eram pouco usadas. A cartografia também era primitiva, os mapas não descreviam exatamente noções geométricas e espaciais, não havia muita noção de escala.

Os escolásticos, Padre Abelardo, Tomás de Aquino, Willian de Ockhan, começaram a defender o uso da razão para reconhecer o mundo verdadeiro, mas isso não era a intenção da Igreja. Estes pensadores contribuíram para o renascimento intelectual do mundo ocidental. O bispo de Lisieux teve a obra mais promissora no ponto de vista da matemática.

O DISCRETO CHARME DO GRÁFICO

A invenção do gráfico foi um passo vital no caminho para uma teoria de lugar. Num nível, um gráfico é uma figura de uma função, representando como uma quantidade varia quando outra também varia. Qualquer mapa é um tipo de gráfico. Relacionando as funções da geometria, obtemos a correspondência entre os tipos de função e os tipos de forma. O estudo das linhas e da superfície torna-se o estudo das funções particulares e vice-versa. Atinge-se, aí, a unificação entre geometria e número. O poder dos gráficos em ajudar o não-matemático a analisar padrões de dados origina-se da mesma conexão de dados com a geometria.

CAPÍTULO 3 - A HISTÓRIA DE GAUSS

A REVOLUÇÃO DO ESPAÇO CURVO

Através dos séculos, os matemáticos que tentaram demonstrar o postulado das paralelas como um teorema, chegaram bem perto da descoberta de novos tipos de espaço, estranhos e emocionantes, mas cada um deles foi impedido por uma crença simples: que o postulado era uma propriedade verdadeira e necessária do espaço.

Carl Friedrich Gauss, em 1792, plantou as sementes de uma nova revolução. Diferente das anteriores, esta não seria uma melhora revolucionária em Euclides, mas um sistema operacional inteiramente novo. Logo os estranhos e excitantes espaços, percebidos por muitos séculos, foram descobertos e escritos.

Com a descoberta de espaços curvos veio a pergunta natural? O nosso espaço é o de Euclides, ou um daqueles outros? Eventualmente, essa pergunta revolucionou a física. A matemática também foi lançada num dilema. Se a estrutura de Euclides não é simplesmente uma abstração da verdadeira estrutura espacial, então o que ela é? E se o postulado das paralelas pode ser questionado, que dizer do resto do sistema de Euclides? Logo depois da descoberta do espaço curvo, toda a geometria euclidiana veio caindo e, o resto da matemática também caiu. Não somente a teoria de espaço, mas também a física e a matemática tinham entrado numa nova era.

O PROBLEMA DE PTOLOMEU

A primeira tentativa conhecida de demonstrar o postulado das paralelas foi feita por Ptolomeu no século 2º d.C. o seu raciocínio era complicado, mas em essência o método era simples: ele assumiu uma forma alternativa do postulado, e então deduziu a forma original dele. Ptolomeu descobriu uma nova forma de demonstração – o argumento circular.

Os matemáticos não incorreriam no mesmo erro duas vezes. Eles incorreriam no mesmo erro diversas vezes. Pois aconteceu que algumas das mais inócuas suposições, algumas tão óbvias que deixaram de ser enunciadas, foram no fim demonstradas como o postulado das paralelas disfarçado. Duzentos anos depois de Ptolomeu, Proclus Diadoco fez a notável tentativa de demonstrar o postulado de uma vez por todas.

Para entendermos o argumento de Proclus, é útil fazer três coisas: primeiro usar uma forma alternativa do postulado das paralelas dada antes, o axioma de Palyfair. Em segundo lugar, tornar o argumento de Proclus um pouco menos técnico. E, finalmente, traduzi-lo do grego para o português. O axioma de Playfair é este:

Dada uma reta e um ponto externo (um ponto que não esteja na linha), há exatamente outra reta (no mesmo plano) que passa pelo ponto externo e é paralela à linha dada.

Para demonstrar o postulado, ou seja, para fazer dele um teorema, devemos demonstrar que qualquer rua passando pela editora The Free Press, que não seja a 6ª Avenida, deve cruzar a 5ª Avenida. O erro de Proclus foi no seu uso de "a separação entre a 5ª e a 6ª Avenida."

PERDIDOS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

O espaço que Gauss, Bolyai e Lobachevsky descobriram – *é o espaço que resulta substituindo-se o postulado das paralelas pela suposição de que, para qualquer reta, não existe apenas uma, mas muitas retas paralelas passando por qualquer ponto externo dado*. No espaço hiperbólico, podemos nos aproximar da forma euclidiana, ela não pode ser atingida – assim como a velocidade da luz, ou ao peso ideal.

Nem Gauss, nem Lobachevsky, nem Bolyai descobriram qualquer modo simples de visualizar este tipo de espaço. Isso foi realizado por Eugênio Beltrami e, de uma forma mais simples, por Henri Poincoré, matemático, filósofo, e primo em primeiro grau do então futuro presidente da França, Raymond Poincoré.

Ao criar seu modelo, Poincoré substituiu termos primitivos como reta e plano por representações concretas. Nós poderíamos modelar o plano não-euclidiano como a superfície de uma zebra, chamar os folículos pilosos de pontos e suas listras de retas, lembre-se do primeiro postulado de Euclides, aplicado no espaço zebra:

1. Dados quaisquer dois folículos pilosos, pode ser traçado um segmento de listra tendo esses folículos pilosos como suas extremidades.

Esse espaço não é valido num espaço – zebra: as listras de uma zebra têm largura e correm somente numa direção. Não havia zebras no espaço de Poincoré, mas ele parecia uma *pizza* ou um crepe.

O espaço de Poincoré funciona: o plano infinito é substituído por disco finito, mas infinitamente fino e com uma fronteira circular perfeita. As retas de Poincoré, em termos técnicos, "são quaisquer arcos de círculos que cruzem a borda do disco em ângulos retos". Um conceito crucial era da congruência, em sua quarta "noção comum", Euclides escreveu: *4. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.*

Empregar a quarta noção comum como uma receita de congruência é uma impossibilidade no espaço não – euclidiano. A solução de Poincoré foi interpretar a congruência definindo um sistema de medida para comprimento e ângulo. Poincoré definiu o ângulo entre duas retas de Poincoré como o ângulo entre suas linhas tangentes no seu ponto de interseção. Por exemplo, lembre-se do postulado 2:

2. Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em qualquer direção.

Ele redefiniu a distância de modo que o espaço se comprime à medida que nos aproximamos do limite do universo, transformando efetivamente a área finita numa infinita. Por exemplo, a distância entre dois pontos diferentes deve sempre ser maior que zero. A forma matemática exata que Poincoré escolheu tinha que transformar a reta de Poincoré que liga quaisquer dois pontos no caminho mais curto entre elas, assim como a reta usual é o caminho mais curto entre pontos no espaço euclidiano.

O modelo de Poincoré não é apenas um modelo de espaço (em duas dimensões), isso significa que os matemáticos provaram que todas as descrições possíveis de matemáticas possíveis do plano hiperbólico são isomórficas (iguais). Se o nosso espaço é hiperbólico ele se comparara exatamente como o modelo de Poincoré.

Algumas décadas após a descoberta do espaço hiperbólico, outro tipo de espaço não euclidiano foi descoberto: o espaço elíptico. O espaço elíptico é o espaço que obtemos se assumirmos outra violação do postulado das paralelas: que as retas paralelas não existem.

ALGUNS INSETOS CHAMADOS DE RAÇA HUMANA

Nos dez anos, a partir de 1816, Gauss passou pesquisando. O objetivo da pesquisa era medir a distância entre as cidades e outros pontos de referência, e reunir esses dados num mapa. Ele inventou o conceito central do campo moderno da probabilidade e estatística – o teorema de que os erros aleatórios se distribuirão numa curva em forma de sino em torno de uma média.

A geometria diferencial é a teoria das curvas na qual uma superfície é descrita pelo método das coordenadas, inventado por Descartes, e depois analisada empregando-se o cálculo diferencial. Gauss chegou a duas conclusões importantes: primeiro, afirmou que uma superfície pode ser considerada como um espaço; a outra ideia inovadora que Gauss estabeleceu foi a de que a curvatura de um dado espaço poderia ser estudada na própria superfície apenas, sem referência a um espaço muito maior, que possa contê-la ou não. Tecnicamente a geometria de uma superfície curva pode ser estudada sem referência a um espaço euclidiano de dimensão superior.

A geometria dos espaços elípticos – chamada de geometria esférica – já era bem conhecida mesmo na Antiguidade. Sabia-se que círculos máximos eram as geodésicas. Fórmulas geométricas relacionando as partes de triângulos esféricos já tinham sido descobertas e aplicadas na elaboração de mapas. Contudo, os espaços elípticos não se encaixam no paradigma de Euclides, e a descoberta de que o globo é um espaço elíptico ficou para um dos alunos de Gauss, Georg Friedrich Bernhard Riemann. Foi feita nos anos do declínio de Gauss, mas esta descoberta, mais do que qualquer outra, eventualmente desencadeou a revolução do espaço curvo.

UMA HISTÓRIA DE DOIS ALIENÍGENAS

Georg Riemann nasceu em 1826. Embora não haja histórias sobre Riemann, quando garoto, ele parece também ter sido inteligente demais para ser um de nós.

Em 1846, ainda com 19 anos, Riemann matriculou-se na Universidade de Göttingen onde Gauss era professor. Por volta de 1827 tinha 27 anos e estava na última reta para uma posição de conferencista em Göttingen, ele entregou três temas para os professores de faculdade, Riemann estava bem preparado para os dois primeiros, mas Gauss escolheu o terceiro tema.

No dia 10 de junho de 1854, Riemann expôs sua palestra no contexto de geometria diferencial, enfocando as propriedades das regiões infinitamente pequenas de uma superfície, em vez de características geométricas em grande escala. As explicações de sua obra eram claras: Riemann explicou como a esfera podia ser interpretada como um espaço elíptico bidimensional. Como Poincoré, Riemann deu a sua própria interpretação dos termos ponto, reta e plano.

O conceito de reta de Riemann leva a outros problemas para os quais não foram oferecidas explicações. Por exemplo, círculos máximos violam a suposição de que duas retas só podem se cruzar num único ponto.

O conceito de *estar entre* dois pontos também se tornou difícil de interpretar. Euclides baseou o conceito de *estar entre*, no postulado 1:

> *Dados dois pontos quaisquer, pode ser traçado um segmento de reta tendo esses pontos como suas extremidades.*

O problema no modelo de Riemann é que há sempre dois modos de se ligar um par de pontos por um círculo. E apesar dessas questões abertas, a palestra de Riemann é considerada uma das obras primas da matemática. A obra de Riemann sobre a geometria se diferenciou e tornou-se a pedra angular da teoria da relatividade de Einstein.

UMA PLÁSTICA FACIAL APÓS 2000 ANOS

As implicações da obra de Riemann demonstram que Euclides tinha cometido diversos tipos de erros: ele tinha feito muitas suposições implícitas; tinha feito outras suposições que não foram formuladas de modo adequado, e tinha tentado definir mais do que era possível. Outro problema estrutural no sistema de Euclides foi não ter reconhecido a necessidade de termos não definidos. Considere a definição do dicionário para espaço como “a área ou lugar ilimitado estendendo-se em todas as direções”. Se acharmos que não entendemos o termo lugar, podemos consultar o dicionário, ele diz que: “lugar” é “a parte do espaço ocupado por certo objeto”. As duas palavras – lugar e espaço – são geralmente definidas uma em termos da outra.

Termos não definidos devem ser manipulados com cuidado, pois facilmente podemos nos perder se interpretarmos um significado em um termo sem demonstrá-lo primeiro, mesmo que o significado pareça tão óbvio a partir de nossa imagem física.

Matematicamente, os termos ganhariam significado a partir de afirmações como estas, ou três primeiros postulados de Euclides:

9- *Dados dois homens quaisquer, pode ser traçada uma mulher com aqueles homens como suas extremidades.*
10- *Qualquer mulher pode ser prolongada indefinidamente em ambas as direções.*
11- *Dado qualquer homem, pode ser traçada uma caneca de cerveja com qualquer raio e com aquele homem como seu centro.*

Euclides cometeu outros erros, de lógica pura, que o levaram a demonstrar alguns teoremas empregando passos que são injustificáveis. Ele também falhou em reconhecer outras suposições que empregava, frequentemente, nas demonstrações, tais como a suposição que existem retas e pontos, que nem todos os pontos são colineares, e que em toda reta há pelo menos dois pontos. Numa outra demonstração, ele assumiu que, se três pontos estão numa mesma reta, podemos identificar um dos pontos estando entre os outros dois.

Em 1871, o matemático prussiano Felix Klein mostrou como corrigir as aparentes contradições do modelo esférico de Riemann para o espaço elíptico, aperfeiçoando Euclides no processo. Em 1894, o lógico italiano Giuseppe Peano propôs um novo conjunto de axiomas para definir a geometria euclidiana. Em 1899, Hilbert, que não sabia da obra de Peano, deu a sua primeira versão da formulação geométrica que é a mais aceita atualmente.

Hilbert se dedicou completamente a esclarecer as bases da geometria. O primeiro passo no seu método era transformar as suposições implícitas de Euclides em declarações explícitas. Os axiomas de Hilbert eram divididos em quatro grupos, eles incluíam suposições não reconhecidas por Euclides como estas que já consideramos:

Axioma I-3: Há pelo menos dois pontos em cada reta. Existem pelo menos três pontos no espaço que não estão todos na mesma reta.

Axioma II-3: dados três pontos quaisquer numa reta, somente um deles pode estar entre os outros dois.

Por volta de 1900, os matemáticos tinham a opinião de que os axiomas eram afirmações arbitrárias, sendo apenas a base de um sistema, cujas consequências deveriam ser investigadas num tipo de jogo mental. Os espaços matemáticos eram considerados como estruturas lógicas abstratas. A natureza do espaço físico tornou-se uma questão separada, uma questão de física, e não de matemática.

Em 1903, num esforço de limpar a área da matemática, Bertrand Russell tentou realizar a dedução da matemática - ou pelo menos tentou mostrar como fazê-lo com seu colega da Universidade de Oxford, Alfred North Whitehead. No sistema deles, até entidades tão fundamentais como os números foram consideradas como construções empíricas que tinham de ser justificadas por uma estrutura axiomática mais profunda e fundamental.

Hilbert era cético sobre isso. Desafiou os matemáticos a provar rigorosamente que o programa de Russel e Whitehead tinha obtido êxito. Essa questão foi encerrada de uma vez por todas em 1931, pelo teorema chocante de Kurt Gödel, segundo o qual deve existir uma proposição verdadeira que não pode ser demonstrada. Isso destrói as alegações de Russell e Whitehead, eles não somente mostraram como todos os teoremas matemáticos podem ser deduzidos da lógica, como é realmente impossível fazê-lo.

CAPÍTULO 4 - A HISTÓRIA DE EINSTEIN

REVOLUÇÃO À VELOCIDADE DA LUZ

No dia 21 de fevereiro de 1870, William Kingdon Clifford, apresentou um artigo para a Sociedade Filosófica de Cambridge, intitulado “Sobre a Teoria Espacial da Matéria” no qual proclamou ousadamente:

Na verdade, eu mantenho que: (1) as pequenas porções de espaço são de uma natureza análoga aos pequenos montes numa superfície que é, na média, plana; (2) a propriedade de ser curvo ou distorcido é transmitida continuamente de uma porção de espaço para outra como uma onda; (3) esta variação da curvatura do espaço é realmente o que acontece naquele fenômeno que chamamos de movimento da matéria...

Einstein chegou a conclusões semelhantes depois de muitos anos de meticuloso raciocínio: *se os objetos em movimento livre se movem nas linhas retas características do espaço euclidiano, então outros tipos de movimento não poderiam ser explicados pela curvatura do espaço não-euclidiano*?.

Foi exatamente o raciocínio de Einstein, baseado na física, não na matemática, que lhe possibilitou desenvolver a teoria que Clifford não conseguiu. Por mais de 200 anos, parecera que todos os eventos no universo eram explicados pela mecânica newtoniana, a teoria baseada nas ideias de Isaac Newton. O espaço é "absoluto", uma estrutura fixa dada por Deus sobre a qual são lançadas as coordenadas de Descartes.

A descrição do movimento de um corpo reagindo a uma força conhecida como "cinemática". Para formar uma teoria completa, precisamos também conhecer a "dinâmica", isto é, como determinar a intensidade e a direção da força, dada a fonte e a separação entre eles. Newton proporcionou tal equação somente com um tipo de força, a força gravitacional.

Juntando as equações de força e movimento, podemos achar uma solução para trajetória de um objeto como função do tempo. Newton fez a união de duas disciplinas separadas – a física e a astronomia.

Se Newton estiver certo quanto à visão de tempo e espaço, então será fácil perceber duas coisas que não podem existir, o limite de velocidade com que uma coisa se aproxime de outra coisa; e segundo, a velocidade da luz não pode ser constante, ou seja, a luz deve se aproximar de diferentes objetos em diferentes velocidades.

O OUTRO ALBERT DA RELATIVIDADE

Um casal da província polonesa de Poznan teve um filho chamado de Albert. Uma criança que chegou aos três anos de idade a Nova York; ele seria o primeiro cientista, um judeu prusso-polonês a ganhar o prêmio Nobel.

Desde cedo, o jovem se destacou em matemática, depois óptica e acústica. Os interesses de Michelson eram nítidos e o curso de física em Anápolis naquela época era um dos melhores. Ele tinha em seu livro texto a tradução de um texto francês chamado Adolph Ganot, onde Ganot diz: "há um fluido sutil, imponderável, e eminentemente elástico, chamado éter, distribuído por todo o universo; permeia a massa de todos os corpos, dos mais densos e mais opacos aos mais leves e mais transparentes."

Ganot atribui ao éter um papel fundamental – que um movimento de um tipo particular comunicado ao éter pode originar o fenômeno do calor, um movimento do mesmo tipo, com frequência maior, produz luz, e pode ser que um movimento, de forma e caráter diferente, seja a causa da eletricidade.

O conceito de éter foi dado em 1678 por Christian Huygens; o nome utilizado por Aristóteles ao quinto elemento - a matéria de que o céu era feito, mas o éter, diferente da água, flui não apenas em torno de nós, mas, também, através de nós.

Olaf Romer descobriu que a luz de uma das luas de Júpiter não chegava a terra instantaneamente. Esse é devido ao fato de que a luz se movimenta a uma velocidade independente de sua fonte, foram evidências de que a luz se movia através das partículas do ar, de forma semelhante ao som. Mas as ondas sonoras eram consideradas apenas um movimento em ordem de um meio, como o ar, a água e uma corda.

Em 1801, realizou-se uma experiência em que se alterou o ponto de vista que predominava; parecia inocente, fazendo-se a luz brilhar através de uma fenda, mas o físico Thomas Young projetou dois fachos de luz (de uma única fonte) através de duas fendas separadas, ele descobriu um padrão alternado de luz e sombra: a interferência, que pode ser facilmente explicada através de ondas. Com a teoria ondulatória da luz, a teoria do éter viu renascimento.

O físico francês Augustin-Jean Fresnel não viu nada de irrelevante na natureza do éter. Sendo assim, publicou, em 1821, um tratado matemático sobre a luz, que dizia que as ondas podem oscilar de duas maneiras, ou na direção de seu movimento, como ondas sonoras ou em ângulo reto em relação a ele, como ondas transversais numa corda.

Fresnel mostrou que poderiam ser ainda mais parecidas com as últimas, mas esse tipo de onda exige que o meio possua certa qualidade elástica, com certa corporeidade. Por este fato, Fresnel afirmou que o éter não é um gás, e sim um sólido permeando por todo universo.

DE QUE É FEITO O ESPAÇO

Em 1865, um físico escocês chamado Maxwell, publicou um artigo chamado "Uma teoria Dinâmica do Campo Magnético", que foi seguido, em 1873, de um livro chamado *Um Tratado Sobre Eletricidade e Magnetismo*.

A teoria de Maxwell é apresentada, hoje em dia, como um conjunto de equações diferenciais que determinam duas funções vetoriais, onde podem ser deduzidos os fenômenos ópticos e eletromagnéticos no vácuo.

Essa teoria consistia num conjunto de 20 equações diferenciais em 20 incógnitas. Maxwell deu aos seus colegas apenas entulhos, sem nenhuma explicação, mas ele foi um dos maiores mestres dos fenômenos eletromagnéticos. Ele publicou um artigo na 9ª edição da Encyclopaedia Britannica, em 1878, sobre sua posição de que o espaço deveria ser feito de éter; ele dizia:

"Sejam quais forem as dificuldades que tenhamos para formar uma ideia consistente sobre a constituição do éter, não há dúvida de que os espaços interplanetários e interestelares não são vazios, mas, sim, são ocupados por uma substância ou corpo material, que certamente é o maior de todos os corpos e o mais uniforme de que temos conhecimento".

Para seu grande mérito, ele não desistiu, descobriu a primeira consequência essencial observável: *se as ondas de luz viajam com uma velocidade constante em relação ao éter, e se a Terra se move numa órbita elíptica através do éter, então a velocidade com a qual a luz vem do espaço e se aproxima da Terra variará, dependendo de onde a luz estiver na sua órbita.*

Maxwell não viveu o suficiente para ver a questão do éter resolvida, mas em 1879, sofrendo de uma dor agonizante por causa de um câncer no estômago, ele escreveu uma carta a um amigo; sua carta levaria à demonstração experimental de que o éter não existe. Michelson viu a carta de Maxwell, quando foi publicada após sua morte, na revista inglesa Nature.

Michelson, um francês de nome Armand-Hipollyte-Louis Fizeau, recebeu uma fortuna de herança de seu pai; gastou seu tempo e dinheiro construindo um aparelho terrestre para medir a velocidade da luz, uma coisa que Galileu tinha planejado. Fizeau construiu um aparelho em que um feixe de luz viajaria sem interrupção num trajeto de oito quilômetros.

Em 1851, realizou uma série de experimentos para testar a teoria de que o éter é arrastado pela superfície da Terra; o aparelho de Fizeau era impressionante e tinha um divisor de feixe, feito com um espelho levemente prateado. Na teoria de Michelson, um fino feixe de luz de uma pequena fonte luminosa era projetado sobre um desses espelhos, metade dele passava e outra metade era refletida a 90º.

Como a luz age como uma onda, se na recombinação um feixe tiver retornado mais rapidamente do que o outro, as oscilações dos dois feixes não estarão mais concordando entre si, isso produziria a interferência. Na verdade, ele não podia nutrir esperança de ter os dois braços de seu aparelho iguais, mas ele resolveu esse problema girando seu aparelho em 90º, e medindo as mudanças nas franjas, quando os dois feixes “trocavam de papel”, em vez de medir as franjas da onda. Desenvolveu a ideia de um interferômetro. Depois de construído, seu aparelho era tão sensível que podia detectar os passos a 100m do laboratório. Era um aparelho de alto custo,

Um americano que encontrou a fama e a fortuna pela invenção do “telégrafo falante” (telefone), Alexander Grahan Bell, trabalhava numa nova invenção – o videofone e contratou Schmidt & Haensch (construtores alemães de instrumentos), para a fabricação desses instrumentos, e foi com o crédito dessa conta que o aparelho de Michelson foi construído.

Em abril de 1881, Michelson realizou a experiência em Potsdam. O que ele queria era testar a hipótese do éter e não refutá-la, medindo assim a velocidade através do éter. Mesmo não encontrando nada, não concluiu que o éter não existia e, sim, que de alguma maneira, nós estamos nos movendo através dele. A única coisa que temos certeza é a realidade e a substancialidade do éter luminífero, e o mais importante era que a teoria eletromagnética de Maxwell exige ondas e que ondas exigem um meio.

Um físico holandês chamado Lorentz, levou muito a sério o trabalho de Michelson. Em 1882, André Poitier enfatizou um problema que foi anteriormente mencionado na teoria de Michelson: na nova análise, a mudança das franjas de interferência seria somente a metade do que Michelson esperava. Lorentz argumentou que a experiência de Michelson tinha um erro experimental, o suficiente para invalidar a conclusão de Michelson.

Em 1887, Michelson e Morley realizaram o experimento definitivo que se tornou parte do interesse de todo estudante de física. Visto como revolucionário, o resultado negativo, para muitos, parecia apenas uma falha para encontrar o defeito desejado – uma medida da nossa velocidade através do éter. Com a descoberta do espaço curvo, a experiência de Michelson, Morley não produziu uma explosão na história das ideias.

Em 1904, Lorentz e outros cientistas fizeram diversas descobertas curiosas; a sua nova teoria introduzia a diferença entre dois tipos de tempo, o “tempo local” e “tempo virtual”. Lorentz também percebeu que o movimento de um elétron através do éter deve afetar o valor de sua matéria.

TRAINEE **ESPECIALISTA – TÉCNICO DE 3ª CLASSE**

Em 1805, Napoleão passou em frente a casa de Gauss em Göttingen, montado em seu cavalo branco, voltando de uma vitória decisiva, local também que em breve se tornaria o lugar de nascimento de Albert Einstein, considerado o maior físico da história.

Einstein era quieto e tímido, foi ensinado em casa por um professor particular, até que um dia, num momento de raiva, ele jogou uma cadeira em seu professor. Gênio escondido atrás de respostas, ele conferia e reconferia a sua resposta antes de falar. Aos 13 anos, Einstein tinha uma habilidade especial em matemática.

Por volta de 1895, Einstein já conhecia sobre a teoria de Michelson, Morley, sobre o trabalho de Fizeau e de Lorentz; apesar de aceitar a teoria do éter naquela época, Einstein conclui que não importava qual seja a velocidade que você se movimente, nunca seria capaz de alcançar uma onda luz, assim a relatividade estava sendo elaborada.

Albert recebeu um bilhete de seu médico dizendo que ele estava à beira de um esgotamento nervoso, e um bilhete de seu professor de matemática dizendo que ele já sabia toda a matemática do currículo, levou os bilhetes ao diretor e recebeu autorização para sair da escola.

Hermann, reconhecendo que seu filho era um excelente matemático, não deixou que Albert ficasse fora da escola, convencendo-o a voltar para estudar engenharia elétrica. Albert resolveu se candidatar numa das melhores escolas daquela época, a Escola Técnica Superior Suíça, tinha fama reconhecida internacionalmente e não exigia diploma de ensino médio; ele fez o vestibular e foi reprovado.

Enquanto trabalhava num escritório de patentes, Einstein terminou seu doutorado na Universidade de Zurique. Em 1905, o cérebro de Einstein explodia com ideias revolucionarias. Sua produção resumiu-se em seis artigos, um baseado na sua tese de doutorado – U*ma questão de geometria (geometria da matéria).* Publicou uma dissertação na revista Anais da Física, nela determinou um novo método teórico pra determinar o tamanho das moléculas.

O estudo de Einstein sobre o movimento, devido ao bombardeamento aleatório das partículas pelas moléculas do líquido, levou-o à confirmação de uma nova teoria molecular do físico experimental Jean - Baptiste Perrin. Em 1905, Einstein explicou o efeito fotelétrico (metais que emitiam elétrons quando a luz incidia sobre eles); explicou também sobre a ideia quântica de Max Planck num artigo, como se fosse uma lei física universal.

Ninguém ousou imaginar, como Einstein, que a ideia quântica poderia ser aplicada à radiação, contradizendo a bem compreendida e testada teoria de Maxwell. Lorentz e até Planck se opuseram à teoria de Einstein. Em 1921, Einstein recebeu o prêmio Nobel de física por isso, mas é pelos dois artigos, escritos em 1905, que Einstein é mais lembrado, pois representam o começo de uma viagem que conduziu os cientistas ao universo do espaço curvo.

UMA ABORDAGEM RELATIVAMENTE EUCLIDIANA

Em dois artigos, publicados em 1905, "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", publicado em 26 de setembro, "Depende a inércia de um corpo de conteúdo de energia?", publicado em novembro; Einstein explicou sobre a sua primeira teoria da relatividade, a relatividade especial. Ironicamente, nas suas teorias, a geometria não-euclidiana teria um papel central; baseou seu raciocínio para a relatividade especial em dois axiomas sobre o espaço: *É impossível determinar, exceto em comparação a outras a outros corpos, se você está em repouso ou em movimento uniforme.*

O primeiro axioma de Einstein, chamado de princípio da relatividade ou relatividade de Galileu, foi postulado por Oresme, ele é verdadeiro mesmo na teoria newtoniana. O primeiro postulado de Einstein é: *A velocidade da luz, independente da velocidade da fonte, é igual para todos os observadores do universo.*

A ideia mais importante está contida na frase "e é igual para todos os observadores", e não significa muito: todos os observadores podem concordar que a velocidade da luz era a sua velocidade ao se aproximar de um objeto "estacionário". Esta é a situação dentro do referencial teórico de Newton – o espaço absoluto, ou o éter, fornece um sistema de referência em relação ao qual o movimento pode ser medido. Se não pudermos distinguir o repouso do movimento uniforme, e todos os observadores medem a mesma velocidade da luz que se aproxima, estejam eles em movimento relativo ou não, então encontramos aqui um paradoxo.

Com a queda da simultaneidade, vem a relatividade da distância e do tempo. Para verificar, apenas devemos medir e marcar as extremidades do que deseja ser medido, e depois colocar um metro para medir. Se estiver em repouso em relação a nós, isso é comum; se estiver se movendo existe um passo intermediário, por exemplo, marcamos numa folha de papel duas extremidades quando o objeto passar, pegamos o metro para medir a distância entre as marcas, mas precisamos ter certeza que marcamos as extremidades simultaneamente. Se errarmos e marcarmos uma extremidade antes da outra, a segunda terá viajado uma distância e não teremos a medida verdadeira. O que percebemos com medidas simultâneas, uma pessoa movimentando-se com o objeto medido, não concordará.

Einstein descobriu anomalias semelhantes no comportamento do tempo. Observadores em movimento em relação não concordarão sobre o intervalo de tempo, como o comprimento, a duração não tem significado absoluto. O tempo que um observador mede entre dois eventos no seu próprio lugar, é chamado de tempo próprio. Qualquer outro observador em movimento, em relação a este observador perceberá um intervalo maior de tempo entre os dois eventos. Na relatividade, a grama é mais verdade no jardim dos outros.

Na relatividade especial, os objetos ainda seguem a primeira lei de Newton: eles se movem em linha reta a menos que sofram força externa. No entanto, essa não é uma maneira relativística de enunciar a primeira lei; na relatividade espaço e tempo se misturam diferentemente para observadores diferentes. Os conceitos de geometria devem ser alterados para incluir tempo assim como espaço. A primeira lei de Newton pode, então, ser enunciada empregando a nova geometria, assim:

A menos que sofra a ação de uma força externa, um objeto sempre segue uma linha de universo de um evento para o outro de modo que o tempo lido pelo seu próprio relógio (isto é, o tempo próprio) seja máximo.

Einstein idolatrava Newton, mas estava destruindo umas de suas crenças mais básicas, a existência do espaço e do tempo absoluto. Em 1906, Plank tornou-se o primeiro, além de Einstein, a escrever um artigo sobre a relatividade e a aplicar a relatividade à teoria quântica.

A MAÇÃ DE EINSTEIN

Einstein um dia, pensou: “em queda livre, uma pessoa não sente o seu próprio peso”, mais tarde chamou isso de “o pensamento mais feliz de toda a minha vida”. A pessoa caindo no pensamento de Einstein foi a maçã de Einstein, cuja sucessão foi a teoria da gravidade. A única teoria da gravidade que existia em 1905 era a de Newton; como a teoria da relatividade especial substituiu as leis de Newton por uma nova cinemática, não é surpresa o fato de que Einstein descobriu que a teoria da gravidade de Newton já não se encaixava mais. O próprio Newton estava infeliz com sua lei, ele considerava a transmissão instantânea de força como um conceito suspeito e em relatividade isso é um crime: nada pode ser transmitido mais rápido do que a velocidade da luz.

Com a relatividade especial, Einstein colocou os observadores inerciais em pé de igualdade. Se tivesse êxito, sua nova teoria não precisaria de forças fictícias para explicar o “movimento não-uniforme” e a forma das leis da física não precisaria mudar.

A percepção do seu “pensamento mais feliz” deu-lhe justamente o que precisava: “ Se uma pessoa cai livremente, ela não sentirá seu próprio peso”. Enunciada livremente, tornou-se o principio da equivalência, ou o terceiro axioma de Einstein:

É possível distinguir, exceto por comparação com outros corpos, se um corpo está sofrendo uma aceleração uniforme ou se está em repouso em um campo gravitacional uniforme.

As obras de Riemann e Gauss permitiram que Einstein aplicasse sua teoria a qualquer campo gravitacional. Em 1907, Einstein alegou, pela primeira vez, que a passagem do tempo é alterada pela gravidade.

DA INSPIRAÇÃO À PERSPIRAÇÃO

No dia 25 de novembro de 1915, Einstein apresentou um artigo que dizia: “Finalmente a teoria da relatividade geral está completa, como uma estrutura lógica”. Na teoria de Einstein, o efeito da massa não é exercer uma força gravitacional, mas sim mudar a forma do espaço-tempo, de acordo com a teoria, a curvatura de uma região espacial (a média em todas as direções) é determinada pela massa dentro da região.

OS TRIUNFOS DO CABELO AZUL

Após observações sobre o eclipse total do sol de 29 de maio de 1919, a teoria de Einstein foi confirmada, com uma manchete no jornal *The Times* e outro comunicado no *The New York Times*, que falava: “A Teoria de Einstein Triunfa”. Um dia, depois de um jantar, Alexei mostrou vontade de tingir seus cabelos de azul, muitos acharam uma atitude não muito relevante, então surgiu Einstein propondo que o cabelo azul se tornasse moda.

Na Alemanha, os anti-semitas tiraram vantagens por Einstein ser judeu, os ganhadores do prêmio Nobel, Lohannes Stark e Philipp Lenard apoiaram a relatividade como uma conspiração dos judeus para dominar o mundo. Quando Hitler foi nomeado chanceler, os soldados das tropas de assalto nazistas invadiram o apartamento de Einstein em Berlin e sua casa de veraneio, no dia 1º. de abril de 1933, confiscaram suas propriedades e ofereceram uma recompensa por sua captura como inimigo de estado.

Einstein passou seus últimos anos tentando criar uma teoria unificada de todas as forças. Einstein faleceu na manhã do dia 18 de abril de 1955, tinha 76 anos.

CAPITULO 5 A HISTÓRIA DE WITTEN

A ESTRANHA REVOLUÇÃO

Einstein mostrou que a presença da matéria afeta a geometria encurvando o espaço (e o tempo). A matéria pode curvar o espaço um pouco aqui e, se estiver concentrada, um pouco ali. De acordo com essa teoria, as propriedades mais básicas do espaço determinam as leis da natureza, e as propriedades da matéria e energia, que constituem o universo. O espaço torna-se juiz daquilo que pode existir.

De acordo com a teoria das cordas, existem dimensões adicionais do espaço, tão pequenas que qualquer espaço livre que tivermos nelas, não é observável em experiências atuais.

A teoria das cordas, embora ainda mal compreendida, evoluiu para outra teoria, a teoria M, que está levando à conclusão: o espaço e o tempo não existem realmente, mas são apenas aproximações de algo muito mais complexo. Chegando a teoria das cordas, a física retorna à sua parceria com a matemática.

DEZ COISAS QUE ODEIO NA SUA TEORIA

Feynman achava que a teoria das cordas era loucura. No entanto, fazendo referência ao filme *Dez coisas que odeio em você*, pode-se dizer que Swharz encontrou na teoria das cordas uma beleza matemática essencial, algumas vezes por causa de suas falhas. Ele tentava resolver um problema que também era de Einstein e muitos outros depois de Einstein- reconciliar teoria quântica com a relatividade. Diferentemente da teoria da relatividade, a primeira teoria quântica demorou décadas para surgir com a descoberta de Planck da quantização de níveis de energia.

Nos anos de 1925-27, o austríaco Erwin Schrödinger e o alemão Werner Heisenberg, descobriram, independentes um do outro, teorias que explicavam como substituir as leis do movimento de Newton, por equações que reuniam os princípios quânticos deduzidos em décadas anteriores. As duas teorias foram apelidadas de mecânica ondulatória e mecânica matricial; matematicamente, pareciam tão diferentes quanto os descobridores.

Schrödinger escreveu sua equação quando estava com sua amante, passeando numa estação de esqui. Logo, o físico inglês Paul Dirac provou que sua mecânica ondulatória e a mecânica matricial de Heisenberg eram iguais. De acordo com a mecânica quântica, não é verdade que podemos calcular os eventos do futuro, por isso que Einstein odiava e condenava a teoria da mecânica quântica.

A INCERTEZA NECESSÁRIA DE SER

A origem da indeterminação em mecânica quântica está no princípio da incerteza, que diz que algumas das características dos sistemas, que são grandezas quantitativas na descrição newtoniana de movimento, não podem ser descritas com exatidão ilimitada.

O que incomodou muitos físicos na mecânica quântica foi o conceito de um Deus perfeito e uma natureza imperfeita. Este limite ao determinismo inspirou a famosa citação de Einstein: “A teoria da mecânica quântica proporciona muito, mas ela não nos aproxima dos segredos do Velho Sábio. De qualquer forma estou convencido de que ele não joga dados”.

A matemática do princípio da incerteza afirma isto: *o produto da incerteza dos dois membros complementares do par deve ser igual a um número chamado de constante de Planck.* A constante de Planck é, aproximadamente, um bilionésimo de bilionésimo de bilionésimo de alguma coisa, ou 10^{-27}, unidade chamada erg-segundo, para a maioria das pessoas significa velocidade zero. O limite de erro de 1cm/seg. conduz a uma precisão limite que, como a constante de Planck, é extremamente pequena.

O EMBATE DE TITÃS

Uma das razões de Einstein ter obtido pouco apoio à teoria do campo unificado deveu-se ao motivo de que o embate entre a relatividade geral e a mecânica quântica só aparece em regiões muito pequenas do espaço, e que ainda hoje não temos esperança de observar diretamente. O território em que surgem os problemas é descrito como o ultramicroscópio.

Aplicar o princípio da incerteza e da relatividade geral a regiões muito pequenas do espaço leva a contradições básicas com a própria teoria da relatividade. Por isso que os físicos acreditam que a teoria de Einstein deva ser revisada, no que diz respeito ao domínio do ultramicroscópio. Se Planck for o vencedor nesse debate com Einstein, a resposta está numa ideia que Feynman e outros aceitaram com grande dificuldade, uma fonte de chacota para Schwarz, segundo ele, não uma falha, meramente uma característica de sua amada teoria.

UMA MENSAGEM NUM CILINDRO KALUZA-KLEIN

Uma das abordagens mais promissoras veio a Einstein num dia de 1919, quando abria uma carta de um matemático empobrecido chamado Theodor Kaluza. A carta era uma proposta a Einstein de como poderiam ser unidas as forças elétricas com a gravidade. A teoria tinha um obstáculo, Einstein respondeu a Kaluza que nunca tinha lhe ocorrido a ideia de obter, por meio de um meio cilíndrico de cinco dimensões, uma teoria unificada, disse ainda que gostou imensamente da ideia de Kaluza, que estava à frente de sua época.

Ele fez a pergunta: se estendermos formalmente as equações, obteremos as equações de campo de Einstein para cinco dimensões, quais equações obteremos para os fatores adicionais? A resposta foi que obteremos as equações de campo de Maxwell, do campo eletromagnético. A partir da quinta dimensão, surge o eletromagnetismo, inesperada e subitamente da teoria da gravidade.

Este tinha como opinião a de que o eletromagnetismo e a gravidade são reais componentes da mesma coisa, que parecem diferentes porque o que observamos é transformado numa média no movimento indetectável da quarta dimensão espacial extremamente pequena.

Em 1926, Oskar Klein inventou a mesma teoria, com alguns aperfeiçoamentos.

O NASCIMENTO DAS CORDAS

A história da teoria das cordas começou a 250m acima do nível do Mediterrâneo. No verão de 1967, um tópico assim foi a abordagem da teoria das partículas elementares, conhecida como “a teoria da matriz-S”.

A abordagem da matriz-S foi introduzida por John Wheeler, em 1937, e defendida, na década de 60, por um físico chamado Geoffrey Chew. A letra s representa *espelhamento* em inglês, que é o meio principal dos físicos estudarem as partículas elementares: aceleram-se a enormes energias, fazem com que elas colidam umas com as outras, e observam as sobras que voam de lá. A matriz-S, é como uma caixa preta que recebia dados de entrada [input]- as identidades das partículas que colidem..., e criava como saída [output] o mesmo tipo de dado, mas com partículas emergentes.

Levou um ano e meio, mas Veneziano concluiu que todas as propriedades matemáticas da matriz-S eram possuídas pela função única e simples chamada de função de Euler.

PARTÍCULAS, SCHMARTÍCULAS!

Geoffrey Chew, um dos físicos mais promissores da década de 1960, levantou-se numa conferência e declarou que a teoria de campo não valia nada. Disse que não deveriam existir partículas elementares e ainda propôs que os físicos procurassem por uma teoria do tipo “uma partícula faz todas as demais”. Ele acreditava que o universo é assim porque é a única maneira em que ele pode existir. Witten chamou a teoria da matriz-S “uma abordagem e não uma teoria”. Mas Gell-Mann disse que a abordagem da matriz-S era a abordagem correta.

Um dos problemas foi a descoberta do pósitron, a antipartícula do elétron, e outra, um novo membro do núcleo, quase como um próton. Como foi difícil explicar as novas partículas, os físicos admitiram as novas partículas e o conceito da aritmética e de duas novas forças, a força forte e a força fraca. Numa teoria quântica de campo, há somente um modo de as coisas interagirem no universo: trocando partículas, conhecidas como mensageiras.

Na década de 1970, foi criada uma nova teoria unindo a teoria do campo eletromagnético com a força fraca, assim em analogia à eletrodinâmica quântica, foi inventada uma teoria para a força forte, com suas partículas mensageiras, os glúons. A intensidade das forças também é colocada na teoria sem explicação, codificada em números chamados de constantes de acoplamento, a reação de uma partícula a uma força, é caracterizada por uma quantidade chamada carga.

Assim como Chew, os físicos querem encontrar uma teoria completamente definida para a teoria das cordas, esperam que então possam entender a intensidade e a origem de todas as forças, tipos e propriedades das partículas, e a estrutura do próprio espaço. E na teoria deles como na de Chew, uma só partícula resolve.

As cordas na teoria das cordas não estão presas como as cordas de um violão, elas podem ser abertas e fechadas; podem dividir-se e juntar-se, fundir-se em suas extremidades formando um laço, ou unir-se e dividir-se formando dois laços. E quando a corda se une ou se junta, suas propriedades mudam. A energia de vibração, por ex., depende do comprimento de onda e amplitude.

Na teoria das cordas, três dimensões não são suficientes: são a geometria e a topologia exatas das dimensões adicionais que determinam a teoria das partículas elementares e as forças que a teoria das cordas anuncia.

Uma corda em uma dimensão só pode se esticar de um jeito, esticando e comprimindo-se; num espaço tridimensional, a direção da vibração pode espiralar ou girar. Quanto mais dimensões, mais complicados serão os espaços possíveis, principalmente se os espaços não forem planos, e em todos os espaços, as vibrações serão diferentes.

Em 1985, os físicos descobriram a classe de espaços que tem as propriedades adequadas, chamados espaços de Calibi-Yau, de seis dimensões, são espaços complicados como *donut* de chocolate, mas que tem algo em comum- um buraco. O complicado é que existem muitos espaços de Calibi-Yau conhecidos, e vários com mais de três buracos.

O PROBLEMA COM AS CORDAS

Quando Nambu e outros propuseram a teoria das cordas, ela tinha algumas particularidades. Quando as probabilidades da ocorrência de alguns processos foram calculados, de acordo com as regras da mecânica quântica, a matemática deu números negativos. Logo, os físicos perceberam que existia uma falha bem mais embaraçosa. Na mecânica quântica, as partículas pertencem a um dos dois tipos: bósons e férmions; no nível técnico a diferença entre bósons e férmions é um tipo de simetria interna chamada spin, mas no nível prático a diferença é que dois férmions nunca podem ocupar o mesmo estado quântico.

Isso significa que os elétrons no átomo não se acumulam todos no mesmo estado de energia mais baixo. Assim, a matéria é feita de férmions, as partículas mensageiras na transmissão de bósons, mas na teoria da bosônica das cordas, todas as partículas são bósons. Este é o problema na teoria das cordas que Schwarz atacou primeiro. Schwarz desenvolveu uma teoria conhecida como teoria das cordas girantes, que incluía tanto as partículas femiônicas quanto as bosônicas, eliminava os táquions e reduzia o número de dimensões exigidas de 26 para 10.

Em 1984, Schwarz, trabalhando com seu novo companheiro Michel Greene, descobriu que, na teoria das cordas, certos termos que podiam levar a anomalias cancelavam-se milagrosamente, assim achou que tinha descoberto a teoria de tudo. Até que Edward Witten, físico e matemático mais influente do mundo, ligou para Schwarz dizendo que tinham descoberto vários novos resultados importantes, como a identificação dos espaços Calabi-Yau como candidatos para dimensões curvas. Hoje o artigo de Schwarz com Greene é definido como “a primeira revolução das supercordas”.

A TEORIA ANTERIORMENTE CONHECIDA COMO TEORIA DAS CORDAS

No início da década de 1990, a teoria das cordas tinha caído em popularidade. O teórico das cordas Andrew Strominger lamentou, pois ainda existiam grandes problemas. E parte deles foi a falta de novas profecias extraídas da teoria. Pareciam existir cinco espaços de Calabi-Yau diferentes como candidatos, mas cinco estruturas fundamentalmente diferentes para a teoria. Explicando Strominger, é antiestético ter cinco teorias únicas da natureza diferentes.

Há semelhanças entre Einstein e Witten, os dois são judeus, passaram anos no Instituto de Estudos Avançados na Universidade de Princeton. No entanto, se formos comparar, Witten é muito mais parecido com Gauss do que com Einstein. E como Gauss, a sua obra está tendo um grande impacto sobre a direção da matemática moderna, coisa que Einstein nunca fez. Tem outro lado, a abordagem de Witten sobre a teoria das cordas, agora a teoria M, é conduzida por percepções da matemática, e não por princípios físicos, não por escolha, mas por acidente histórico talvez: afinal, a teoria foi descoberta inesperadamente.

Em março de 1995, Edward Witten falou numa conferência sobre a teoria das cordas na Universidade do Sudoeste da Califórnia; a palestra mudou tudo; o que Witten explicou foi um milagre matemático: todas as cinco teorias de cordas diferentes, afirmou, são simplesmente diferentes formas aproximadas da mesma teoria mais ampla, agora chamada de teoria M.

De acordo com a teoria M, as cordas não são realmente a partícula fundamental, mas apenas exemplos de objetos mais gerais, chamados *branas*, abreviatura de membranas. As *branas* são versões de dimensão superior das cordas, que é um objeto unidimensional, assim as leis da física dependem das vibrações mais complexas dessas entidades mais complexas ainda, e existe na teoria M, uma dimensão curva adicional-totalizando 11 dimensões e não 10. Mas o aspecto mais estranho na teoria M, é que espaço e tempo, em algum sentido fundamental, não existem. As ideias da teoria M têm levado a uma indicação ainda mais surpreendente de que há algo nesta ideia das cordas: uma predição que tem a ver com a física dos buracos negros.

Em 1995, Andrew Strominger e Cumrum Vafa publicaram um cálculo espetacular: empregando a teoria M, eles mostraram que podemos criar certos tipos de buracos negros (teóricos) a partir das *branas*; para esses buracos negros, os estados são *estados brana* - e podemos contá-los.

A esperança de obter evidência experimental a favor da teoria M reside atualmente em duas áreas. Uma é a possível descoberta das partículas supersimétricas, o outro teste seria uma busca de desvios na lei da gravidade. Dependendo da natureza das dimensões adicionais, é possível na teoria M que, à medida que os objetos fiquem extremamente próximos, a atração entre eles aumente muito mais rapidamente.

A natureza evolui com uma ordem oculta. A matemática a revela. A teoria M será a bela teoria dos livros-texto dos cursos de física nas faculdades de amanhã. Como um jovem cientista, Schwarz sabia apenas que a sua teoria era bonita para não servir para nada. Atualmente, toda uma geração de pesquisadores olha para a natureza e vê suas cordas. Seria difícil ver o mundo novamente do modo antigo.

13. MOLES, Abraham. A criação científica. São Paulo: Perspectiva, 1998

A POSIÇÃO ADOTADA

Evolução das Relações entre Ciência e Filosofia

Em sua origem, o conhecimento científico e a filosofia eram interligados, compreendidos no termo “filosofia natural”.

A evolução histórica provocou divergências acentuadas entre ciência e filosofia, sendo que o desenvolvimento da teoria da Relatividade e da Microfísica incentivaram a união da ciência e da metafísica

A *démarche* científica e as linhas diretrizes do pensamento filosófico moderno

Evoluindo constantemente, a filosofia científica refuta como inadequada e paradoxal a definição com um determinismo de Laplace e se contenta com determinismo aproximativo válido em grande escala.

O papel da ciência não é mais o de prever a marcha do universo em sua minúcia, e sim o de construir um modelo inteligível que sirva para o aprendizado da natureza pelo homem.

O pensamento científico rejeita como enganador o mundo das sensações manifestando retorno parcial do materialismo a um idealismo objetivo, dando a primazia aos conceitos abstratos.

Cada vez mais é dada importância ao pensamento criador dos dipolos dialéticos que tendem a suprir os fatos unitários e que são destacados pela inteligência do fundo de complexidade dos fenômenos.

No progresso científico moderno, a ciência aplicada é um elemento fundamental. A ciência aplicada e a evolução das ciências das comunicações, recolocam o indivíduo humano e suas propriedades no foco do pensamento científico.

No seu aspecto criador, uma classificação faz apelo a duas dimensões: a dos algoritmos lógicos aos quais elas recorrem, e a das técnicas experimentais que fazem aparecer os fatos.

Diante da complexidade dos fenômenos, a atitude do cientista é uma atitude de escolha; não constrói apenas o que lhe agrada, mas escolhe aquilo que lhe agrada construir.

O pesquisador parte da rede ramificada constituída pela démarche criadora, partindo de uma situação, de uma perspectiva no campo de visão da complexidade dos fenômenos essenciais para a descoberta.

Estudo Psicológico do raciocínio Científico

O estabelecimento dos fatos, a ciência aplicada e o universo científico existentes, apresentam-se à nossa visão interior sobre aspecto de uma rede emalhada de conhecimentos coerentes, bem estruturada, cujos fios são a demonstração dos fatos.

É grande a diferença entre essa ciência acabada e seus modos de edificação.

A construção da evidência é feita através da demonstração de um fato a partir de evidências elementares possuídas pelo receptor, ela se apresenta como a comunicação de um individuo a outro, e deve se levar em conta seu repertório comum de conhecimentos.

A demonstração não tem valor por si só. Ela é reabsorvida no campo discursivo quando desempenha seu papel e cria evidência. Exprime o valor operacional do conceito assim colocado em ação.

Sendo assim, o acento deve ser posto no valor psicológico que está extremamente ligado com seu valor estético.

Este estudo nos permite abordar o estudo da criação científica.

Estudo dos Mecanismos Reais da Criação Científica

O racionalismo, a lógica formal e o valor da verdade, desempenham na criação um papel extremamente restrito.

O objetivo da criação científica é encontrar um modo de construção por encadeamento de juízos *a priori* postos em correlação com as sucessivas confrontações com o real visível.

Estes juízos, *a priori*, que são as ideias, originam-se de um *status nascendi* do pensamento criador, cujos mecanismos são praticamente independentes do domínio intelectual onde exercem ciência, arte ou literatura.

“Infralógicas” é como se chama os modos de reunião de conceitos verbais, visuais ou simbólicos, as gramáticas das ideias, ou seja, orientam o pensamento na sua elaboração para uma “boa forma”.

É com um clima de gratuidade essencial que a criação dos pensamentos conceituais é liberada de todas as contingências da razão, da lógica ou da verdade, em sua mentalidade lógica.

O estudo de *status nascendi* do pensamento neste reservatório de conceitos e imagens comporta três partes principais:

1ª como edificamos os conceitos gratuitos (metodologia heurística);

2ª como reunimos os conceitos entre si em um encadeamento (infralógicas);

3ª como estabelecemos seu valor e verificamos seu acordo com o que já sabíamos.

Os Métodos Heurísticos

Classificamos vinte e um métodos heurísticos e seus diferentes aspectos:

12- Método de aplicação de uma teoria
13- Método da misturas de duas teorias
14- Método de revisão das hipóteses
15- Métodos dos limites
16- Método de diferenciação
17- Métodos de definições
18- Método de transferências
19- Método de contradição
20- Método crítico
21- Método de “renovação”
22- Método de pormenores
23- Método da desordem experimental
24- A matriz de descoberta
25- Método de recodificação
26- Método de apresentação
27- Método de redução fenomenológica
28- Método dogmático
29- Método de classificação
30- Método de emergência
31- Os métodos estéticos
32- Método de síntese

As Infralógicas

O exame dos métodos heurísticos, utilizados pela criação de conceitos, ou por vias diretrizes, leva a um estudo da reunião dos conceitos entre si em uma sequência racional, um *logos,* cujos modos e regras constituem formas generalizadas de lógicas: as infralógicas.

Sistemas infralógicos propriamente ditos:

4- A lógica mitopoética
5- A lógica de justaposição ou perilógica
6- A lógica de oposição ou antilógica
7- A lógica do prolongamento
8- A analógica ou lógica das formas

As lógicas formais

9- Lógicas de probabilidades ou da indução
10- Lógica binária
11- Lógicas polivalentes e numerais

Deste exame podemos tirar as seguintes conclusões:

12- A lógica tradicional não é nem universal, nem única, nem normativa. *A priori* ela não manifesta as leis de uma razão puramente transcendental.
13- As infrálógicas são o sistemas discursivos imediatos da descoberta, seu grupo constitui o método de utilização do cérebro e que chamaremos de “lógica natural”.
14- As infralógicas são arbitrárias, tem uma coerência variável, geralmente fraca, são dependentes da estrutura mental do indivíduo.
15- Um ideal muito difícil de atingir é a lógica formal clássica que é muito aperfeiçoada, raramente mantida e essencialmente artificial.
16- As infralógicas esclarecem as origens da lógica universal, assim como o “patológico” esclarece o “normal”.
17- A fonte do pensamento lógico se encontra na psicologia profunda do corpo social (lógica mitopédica).

Os Processos de Utilização

Os processos de utilização das ferramentas intelectuais da criação são os métodos heurísticos e as infralógicas o modo de ligação entre si.

As ligações se fazem segundo os sistemas lógicos ou infralógicas. Os caminhos que respondem às conexões lógicas dos conceitos são as vias principais, que não são forçosamente os mais curtas.

O que se nota da redescoberta, explica-se pela abundância dos percursos possíveis desta rede, desembocando no mesmo ponto resultado, a partir de diversos pontos de partida por trajetos diferentes. Se tais trajetos forem múltiplos, não serão percorridos por acaso. O pesquisador dispõe simultaneamente de regras de orientação na rede que são mais ou menos conscientes. Entre tais regras destacam-se:

O princípio da simplicidade ou de redução das entidades inúteis.

O princípio do menor esforço.

O princípio de coordenação das precisões.

O princípio da distância mínima ao concreto.

A realização de uma sequência conceitual.

O objeto do trabalho e o modo pelo qual a rede é percorrida definem objetivamente estilos científicos, estatisticamente estáveis, que são a expressão das características de personalidade do pesquisador ou do micro-grupo.

A inteligência não desempenha um papel exclusivo na criação científica.

O caráter do pesquisador influi diretamente na escolha dos temas, do métodos e dos modos de conexão das ideias.

A partir de diferentes fatores pode se definir tipos entre os espíritos científicos: o teórico puro, o experimentador, o sintetizador, o diletante, o amante das decimais, o anarquista etc.

14. SATOY, Marcus Du. A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

O esforço da humanidade em compreender os números primos é um exemplo emblemático do que significa ser matemático.

Os números primos são aqueles divisíveis unicamente por si mesmos ou por um.

Os números primos constituem um veículo perfeito para demonstrar como é possível que a matemática tenha em si tanta beleza e encanto. Um dos primeiros grandes descobrimentos, e quem avançou neste tema foi o matemático grego Euclides, foi o que produziu uma racionalização irrefutável para demonstrar como é possível que sempre exista um número primo maior que todos os outros. Prova isso com simplicidade e se torna um dos temas centrais da aventura matemática. Esta capacidade de racionar analiticamente resultará útil na vida, seja ou não matemático.

Uma vez descoberto que há um número infinito de números primos, a investigação continua para compreender se existe um modelo nesta sequência que prossiga ao infinito: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... O matemático é um buscador deste modelo, que orienta seu ouvido para a música sutil que repousa na base do rumor casual do mundo circunstancial.

O descobrimento de um extra no modelo surge na metade do ano 800.

Quando Wagner compunha Tristão e Isolda, o alemão Riemann descobria uma misteriosa estrutura harmônica no coração desta sequência enigmática. Os matemáticos não captaram todavia de todo a natureza deste descobrimento. Como é uma sinfonia inacabada, faltam partes importantes da música.

Isto é o bonito na matemática: matemática é uma matéria viva e vive em contínua evolução.

Outro aspecto importante da matemática é aquele que faz dela uma ciência útil. Os números primos constituem um exemplo perfeito. A seguridade do comércio por via eletrônica se confia hoje nos códigos construídos utilizando os números indivisíveis.

Por outro lado, a matemática tem hoje uma importante atualidade cultural.

Os números primos se encontram nas páginas do Estranho Caso do Cachorro Morto à Meia-Noite de Mark Haddon.

São os protagonistas dos filmes como O Cubo e Contato.

Fazem ostentação de si mesmos em espetáculos da Broadway como Proof, que ganhou o prêmio Pulitzer. Até David Beckham exibia um número primo na camiseta do Real Madrid.

Numa narrativa rica e abrangente, a música dos números primos conta a história de um dos maiores problemas da matemática, que culminou, em meados do século XIX, com uma hipótese do alemão Bernhard Riemann: era possível haver harmonia entre os números primos, semelhante a uma harmonia musical?

É um livro para quem gosta de Matemática e quer fazer com que os outros gostem também. *A Música dos Números Primos* é uma obra que desperta tanto o raciocínio quanto o lado lúdico dos leitores.

Em meados do século XIX, o alemão Bernhard Riemann formulou uma hipótese: é possível uma harmonia entre esses números primos, à semelhança da harmonia musical?

.

A partir de então, as mentes mais ambiciosas da matemática embarcaram nessa procura que parece não ter fim. A história de um problema não resolvido na matemática pode render um prêmio de um milhão de dólares para quem provar a hipótese.

O relato desse verdadeiro Santo Graal da matemática, feito pelo brilhante professor de Oxford Marcus du Sautoy, também pesquisador da Royal Society, aparece aqui pontilhado de casos interessantes e retratos pitorescos dos personagens que, desde Euclides, se envolveram nesse estranho mistério.

Os números primos são, de fato, os bichos mais interessantes da fauna matemática. As partículas elementares da matemática, pois são indivisíveis, e compõem o resto dos números inteiros. Sua característica mais peculiar é o fato de que não tem como, pelo menos até o momento, prever o próximo número da sequência. Desde a Antiguidade até os dias atuais, os matemáticos têm lidado com a tarefa de tentar prever o próximo número primo. Será que a Natureza joga dados com os números, assim como Deus joga?

Para Riemann, há uma grande orquestra em andamento no domínio desses números. Isso significa que, muito possivelmente, há uma ordem implícita na aparente caótica sequência dos primos.

Riemann encontrou em uma função particular chamada de função zeta (uma função com valores imaginários e reais, veja abaixo), escrita inicialmente por Euler, a chave que levaria aos segredos dos números primos. Essa função gera uma paisagem imaginária interessante em que os pontos ao nível do mar (ou seja, em y=0) são espaçados de forma harmônica e alinhados ao longo de uma reta. E esses pontos poderiam ser correlacionados com os primos.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Função Zeta de Riemann

Daí veio à formulação da hipótese de Riemann: todos os pontos ao nível do mar se encontram nessa linha, chamada de linha crítica da função zeta. A prova da hipótese é provar que absolutamente TODOS os pontos estão nessa linha. Se for encontrado um ponto fora dessa linha, a hipótese será considerada falsa.

Quem conseguir provar essa hipótese ganha um milhão de dólares do Instituto Clay de Matemática e a imortalidade matemática. Se verdadeira, explicaria bem porque que não há um padrão forte na sequência dos primos.

Qual seria a utilidade prática da teoria dos números? Está bem na sua frente, na Internet. Os números primos são essenciais para os algoritmos de criptografia usados nos protocolos seguros da rede, já que as chaves públicas são o resultado de um produto entre dois números primos grandes, e fatorar um produto desses é tarefa inviável computacionalmente para os computadores atuais (mas não para os futuros computadores quânticos, eu creio…).

É fato sabido de que a Natureza tem predileção por certos tipos de números, como o fato de o número de pétalas de uma flor ser sempre um número da sequência de Fibonacci.

O ciclo de vida de um certo inseto é sempre um número primo, para poder escapar de um predador. Grande parte de suas vidas é gasta na forma larval e só emerge depois de 13 ou 17 anos, e após sua saída dos casulos, morrem algumas semanas depois. Acredita-se que esses intervalos entre essas emergências dificultam a ação dos predadores.

Uma resposta para a hipótese de Riemann terá enormes implicações para muitos outros problemas matemáticos. Os números primos ocupam lugar tão fundamental na matemática que qualquer progresso na compreensão de sua natureza terá um impacto grandioso.

A hipótese de Riemann parece ser um problema inevitável. Quando navegamos pelo terreno matemático,
é como se todos os caminhos, em algum ponto, levassem necessariamente à mesma paisagem deslumbrante.

RESPONSÁVEIS PELA PUBLICAÇÃO

SECRETARIA DE FORMAÇÃO
Nilcéa F. Victorino
Magda Souza de Jesus

CEPES
CENTRO DE ESTUDOS E PESQUISAS
EDUCACIONAIS E SINDICAIS
Maria Izabel A. Noronha
Coordenadora

SECRETARIA DE COMUNICAÇÕES
Paulo José das Neves
Roberto Guido

ASSESSORIA DE COMUNICAÇÕES
Rosana Inácio

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Roberto F. dos Santos
Rosely Soares

ASSESSORIA DE FORMAÇÃO
Edson Roberto Nunes

SECRETÁRIA
Solange Cavalheiro
Produção da Secretaria de Formação

REVISÃO

Profa. Sandra Andréia Ferreira